PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

II

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

В. БОЛТОВ, Б. ДЕМИДОВИЧ, В. ЕФИМЕНКО,
А. ЕФИМОВ, А. КАРАКУЛИН, С. КОГАН
Г. ЛУНЦ, Е. ПОРШНЕВА, А. ПОСПЕЛОВ,
С. ФРОЛОВ, Р. ШОСТАК, А. ЯППОЛЬСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Под редакцией
А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. Bolgov, B. Demidovich, V. Efimenko,
A. Efimov, A. Karakulin, S. Kogan,
G. Lunts, E. Porshneva, A. Pospelov,
S. Frolov, R. Shostak, A. Yampolski

PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

PARA LOS CENTROS
DE ENSEÑANZA
TÉCNICA SUPERIOR

CAPÍTULOS ESPECIALES DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

REDACTORES
A. EFIMOV, B. DEMIDOVICH

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por
S. Ya. Kalashnik

На испанском языке
Impreso en la URSS

© Издательство «Наука». 1981
© Traducción al español. Editorial Mir. 1983

INDICE

PREFACIO 9

CAPÍTULO 8. INTEGRALES MÚLTIPLES 11

§ 1. Integral doble 11

1. Propiedades de la integral doble y su cálculo en coordenadas cartesianas rectangulares (11). 2. Cambio de variables en la integral doble (18). 3. Aplicaciones de las integrales dobles. Aplicaciones geométricas (22).

§ 2. Integral triple 30

1. La integral triple y su cálculo en las coordenadas rectangulares cartesianas (30). 2. Cambio de variables en la integral triple (32). 3. Aplicaciones de las integrales triples (34).

§ 3. Integrales múltiples impropias 38

1. Integral respecto a la región infinita (38). 2. Integral de una función discontinua (40).

§ 4. Cálculo de las integrales dependientes de un parámetro 42

1. Integrales propias dependientes de un parámetro (42). 2. Integrales impropias dependientes de un parámetro (46).

Respuestas 50

CAPÍTULO 9. ECUACIONES DIFERENCIALES 57

§ 1. Ecuaciones de primer orden 57

1. Conceptos fundamentales (57). 2. Método gráfico de construcción de curvas integrales (método de isoclinas) (59). 3. Ecuaciones con variables separables (60). 4. Ecuaciones homogéneas (62). 5. Ecuaciones lineales (64). 6. Ecuaciones de Bernoulli (67). 7. Ecuaciones diferenciales exactas (68). 8. Teorema de existencia y unicidad de la solución. Soluciones singulares (70). 9. Ecuaciones no resueltas respecto a la derivada (72). 10. Problemas mixtos de las ecuaciones diferenciales de primer orden (75). 11. Problemas geométricos y físicos que llevan a la resolución de las ecuaciones diferenciales de primer orden (77).

§ 2. Ecuaciones diferenciales de órdenes superiores 83

1. Nociones fundamentales. Teorema de Cauchy (83).

2. Ecuaciones que permiten la reducción del orden (85). 3. Ecuaciones homogéneas lineales (93). 4. Ecuaciones no homogéneas lineales (97). 5. Ecuaciones homogéneas lineales con coeficientes constantes (100). 6. Ecuaciones no homogéneas lineales con coeficientes constantes (103). 7. Ecuaciones diferenciales de Euler (107). 8. Problemas de contorno en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales (109). 9. Problemas de caracter físico (110).

§ 3. Sistemas de ecuaciones diferenciales 112

1. Conceptos principales. Relación con las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden (112). 2. Métodos de integración de los sistemas normales (116). 3. Sentido físico del sistema normal (119). 4. Sistemas homogéneos lineales (120). 5. Sistemas no homogéneos lineales (125).

§ 4. Elementos de la teoría de estabilidad 130

1. Conceptos fundamentales (130). 2. Tipos elementales de los puntos de reposo (133). 3. Método de funciones de Liapunov (135). 4. Estabilidad según la primera aproximación (137).

§ 5. Integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias 139

1. Problema de Cauchy (139). 2. Problema de contorno para la ecuación lineal (147).

Respuestas 149

CAPÍTULO 10. ANÁLISIS VECTORIAL 167

§ 1. Campos escalares y vectoriales. Gradiente 167

1. Características geométricas de los campos escalares y vectoriales (167). 2. Derivada direccional y gradiente del campo escalar (168).

§ 2. Integrales curvilíneas y de superficie 170

1. Integrales curvilíneas de primera especie (170). 2. Integral de superficie de primera especie (172). 3. Integral curvilínea de segunda especie (175). 4. Integral de superficie de segunda especie (178).

§ 3. Relaciones entre las distintas características de los campos escalares y vectoriales 182

1. Divergencia del campo vectorial y el teorema de Gauss —Ostrogradski (182). 2. Rotor del campo vectorial. Teorema de Stokes (184). 3. Operador de Hamilton y su aplicación (187). 4. Operaciones diferenciales de segundo orden (189).

§ 4. Tipos especiales de campos vectoriales 189

1. Campo vectorial potencial (189). 2. Campo solenoidal (192). 3. Campo laplaciano (o armónico) (193).

§ 5. Aplicación de las coordenadas curvilíneas en el análisis vectorial 195

1. Coordenadas curvilíneas. Relaciones principales (195). 2. Operaciones diferenciales del análisis vectorial en las coordenadas curvilíneas (198). 3. Campos escalares centrales, axiales y simétricos al eje (200).
Respuestas 201

CAPÍTULO 11. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA 206

§ 1. Funciones elementales 206
1. Concepto de función de variable compleja (206). 2. Límite y continuidad de una función de variable compleja. Funciones elementales (208).

§ 2. Funciones analíticas. Condición de Cauchy—Riemann 212
1. Derivada. Analiticidad de la función (212). 2. Propiedades de las funciones analíticas (215).

§ 3. Aplicaciones conformes 217
1. Sentido geométrico del módulo y del argumento de la derivada (217). 2. Aplicaciones conformes. Funciones lineal y lineal fraccional (218). 3. Función potencial (224). 4. Función de Zhukovski (226). 5. Función exponencial (228). 6. Funciones trigonométricas e hiperbólicas (229).

§ 4. Integral de una función de variable compleja 230
1. Integral por la curva y su cálculo (230). 2. Teorema de Cauchy. Fórmula integral de Cauchy (232).
Respuestas 236

CAPÍTULO 12. SERIES Y SUS APLICACIONES 246

§ 1. Series numéricas 246
1. Convergencia de la serie. Criterio de Cauchy (246). 2. Convergencia absoluta y condicional. Criterios de convergencia absoluta (249). 3. Criterios de convergencia condicional (256).

§ 2. Series de funciones 260
1. Región de convergencia de la serie de funciones (260). 2. Convergencia uniforme (262). 3. Propiedades de las series convergentes uniformemente (265).

§ 3. Series de potencias 267
1. Región de convergencia y propiedades de las series de potenciales (267). 2. Desarrollo de las funciones en serie de Taylor (270). 3. Teorema de unicidad. Prolongación analítica (277).

§ 4. Aplicación de las series de potencias 279
1. Cálculo de los valores de las funciones (279). 2. Integración de funciones (281). 3. Obtención de las sumas de series numéricas. Aceleración de la convergencia

(283). 4. Integración de las ecuaciones diferenciales aplicando las series (287). 5. Ecuación y funciones de Bessel (291).

§ 5. Series de Laurent 292

1. Series de Laurent. Teorema de Laurent (292). 2. Carácter de los puntos singulares aislados (297).

§ 6. Residuos y sus aplicaciones 299

1. Residuo de la función y su cálculo (299). 2. Teoremas sobre los residuos y sus aplicaciones al cálculo de las integrales de contorno (301). 3. Aplicación de los residuos al cálculo de las integrales definidas (303). 4. Principio del argumento (307).

§ 7. Series de Fourier. Integral de Fourier 308

1. Desarrollo de las funciones en series trigonométricas de Fourier (308). 2. Series dobles de Fourier (312). 3. Integral de Fourier (314). 4. Características espectrales de la serie y de la integral de Fourier (317). 5. Transformación discreta de Fourier (TDF) (319).

Respuestas 322

CAPITULO 13. CÁLCULO OPERACIONAL 355

§ 1. Transformación de Laplace 355

1. Definición y propiedades de la transformación de Laplace (355). 2. Ampliación de la clase de originales (363).

§ 2. Fórmula de inversión. Teoremas del desarrollo 365

§ 3. Aplicación del cálculo operacional para resolver las ecuaciones diferenciales 369

1. Resolución de las ecuaciones diferenciales lineales y de los sistemas de ecuaciones con coeficientes constantes (369). 2. Cálculo de los circuitos eléctricos (374). 3. Integración de las ecuaciones lineales en derivadas parciales (377).

§ 4. Funciones impulsivas 379

1. Función impulsiva de primer orden $\delta(t)$ (379). 2. Funciónimpulsiva de segundo orden $\delta_1(t)$ (381). 3. Representaciones de las funciones impulsivas y sus aplicaciones (381).

§ 5. Aplicaciones del cálculo operacional a la resolución de las ecuaciones integrales e integrales diferenciales, al cálculo de las integrales impropias y a la sumación de las series 382

1. Resolución de las ecuaciones integrales lineales e integrales diferenciales (382). 2. Cálculo de las integrales impropias (384). 3. Sumación de las series (387).

§ 6. Transformación discreta de Laplace y su aplicación . . 389

1. Transformación Z y transformación discreta de Laplace (389). 2. Resolución de las ecuaciones en diferencias (396).

Respuestas 399

PREFACIO

El segundo tomo del libro «Problemas de matemáticas superiores para los centros de enseñanza técnica superior» contiene tales temas de matemáticas como el cálculo integral de las funciones de varias variables, análisis vectorial, ecuaciones diferenciales, conceptos fundamentales de la teoría de las funciones de variable compleja, series numéricas y funcionales y sus aplicaciones, cálculo operacional.

El material expuesto en este libro refleja las partes correspondientes del programa del curso de matemáticas superiores aprobado por el Ministerio de Enseñanza Superior y Media Especializada de la URSS.

Al igual que en el primer tomo, en el segundo cada párrafo comienza por una introducción teórica breve. A los problemas propuestos para la resolución individual preceden los ejemplos que se analizan detalladamente. Todos los problemas de cálculo tienen respuestas; los problemas marcados con uno o dos asteriscos vienen acompañados por indicaciones para resolverlos o por soluciones.

La particularidad de este libro consiste en que contiene problemas que exigen la utilización de ordenadores para resolverlos; estos problemas se dan en las secciones correspondientes. Luego, la teoría de las series funcionales y potenciales generales se expone aplicando la teoría de la funciones de variable compleja. Este enfoque, a nuestro juicio, permite apreciar de un modo adecuado las propiedades de las series potenciales y la representación de las funciones por series potenciales. Para los centros de enseñanza técnica superior en los cuales la teoría de las series se expone por separado en la región real y en la compleja, en los puntos correspondientes del § 2 del cap. 12 se dan primero los problemas de las series con funciones de variable real y en los problemas

del § 3 la variable z puede considerarse real, es decir, se puede poner $z = x$.

Así como en el primer tomo el comienzo de las resoluciones de diversos ejemplos se indica con el signo ◀, el fin, con el signo ▶ y el comienzo de las indicaciones para los problemas, con el signo ●.

A pesar de que el trabajo referente a la composición de la recopilación de problemas fue distribuido entre los autores por capítulos, cada miembro del colectivo de autores lleva una responsabilidad completa por la recopilación en total.

El colectivo de autores aprovecha la ocasión para expresar una vez más la gratitud a los profesores Prilepco A. I., Trenóguin B. A. y Pojozháev S. I., jefes de las cátedras de matemáticas en los Institutos de Moscú de Ingeniería Física, de Acero y Aleaciones y Energético, así como a los colaboradores de estas cátedras que tomaron parte en la discusión del manuscrito del libro y hicieron valiosas observaciones mejorando así su contenido.

Los autores piden se comuniquen todas las observaciones y deseos referentes al contenido y la colección de los problemas a la dirección: 117071, Moscú B-71, Leninski prospect 15, Redacción principal de literatura físico-matemática.

CAPÍTULO 8

INTEGRALES MULTIPLES

§ 1. Integral doble

1. Propiedades de la integral doble y su cálculo en coordenadas rectangulares cartesianas. Sea la función $f(x, y) = f(P)$ definida y continua sobre la región cerrada y acotada G del plano Oxy, $\sigma_n = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n\}$ una partición de la región G en subregiones elementales $\Delta\sigma_k$, cuyas áreas designamos también por $\Delta\sigma_k$, y sus diámetros por d_k. Fijemos los puntos $P_k \in \Delta\sigma_k$, $k = 1, \ldots, n$. La expresión

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\,\Delta\sigma_k$$

se llama suma integral para la función $f(P)$ por la región G. Si existe el límite de sucesión de las sumas integrales S_n para $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} d_k \to 0$ (en este caso $n \to \infty$) y si este límite no depende ni del método de división de la región G en subregiones elementales $\Delta\sigma_k$, ni de la elección de los puntos $P_k \in \Delta\sigma_k$, entonces éste se llama *integral doble* de la función $f(x, y)$ por la región G y se designa mediante $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$.

De este modo,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\,\Delta\sigma_k.$$

Para la integral doble son válidas las propiedades de linealidad y aditividad (véase el problema 1.1).

El cálculo de la integral doble se reduce al cálculo de las integrales reiteradas del modo siguiente. Sea la región G (fig. 79) limitada por las curvas $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, además, las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ siempre son continuas sobre $[a, b]$ y $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$. Entonces

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy, \qquad (1)$$

con la particularidad de que primero se calcula la integral interna por la variable y (x es parámetro) y el resultado obtenido se integra según x. Señalemos que si la curva $\varphi_1(x)$ (o la curva $\varphi_2(x)$) en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ está definida por distintas expresiones analíticas, por ejemplo,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)} x & \text{para } a \leqslant x \leqslant c, \\ \varphi_1^{(2)}(x) & \text{para } c < x \leqslant b, \end{cases}$$

entonces la integral por la derecha se escribe en forma de suma de dos integrales

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy = \int_a^c dx \int_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

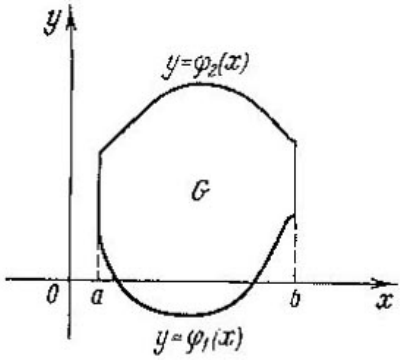


Fig. 79

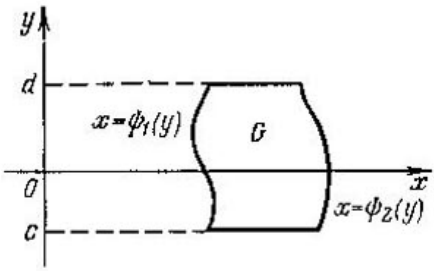


Fig. 80

Análogamente, si la región G está limitada por las curvas $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, y las funciones $\psi_1(y)$ y $\psi_2(y)$ siempre son continuas sobre $[c, d]$ y $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ (fig. 80), entonces

$$\iint_G f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx. \qquad (2)$$

La integral doble representada en forma de (1) ó (2) se llama también integral reiterada.

EJEMPLO 1. Determínense los límites de integración por dos modos y calcúlese la integral doble $I = \iint_G \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$ si la región de integración G está limitada por las líneas $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$.

◀ La forma de la región G (fig. 81) permite aplicar la fórmula (1) para $\varphi_1(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi_2(x)=x$, $a=1$, $b=2$:

$$I=\iint\limits_G \frac{x^2}{y_2}\,dx\,dy=\int\limits_1^2 x^2\,dx\int\limits_{1/x}^{x}\frac{dy}{y^2}=\int\limits_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\Big|_{1/x}^{x}\right)dx$$

$$=\int\limits_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=2\frac{1}{4}.$$

Si para calcular la integral doble se aplica la fórmula (2) entonces se debe poner

$$\psi_1(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & \text{para } \dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,\\ y & \text{para } 1<y\leqslant 1,\end{cases}\qquad \psi^2(x)=2,$$

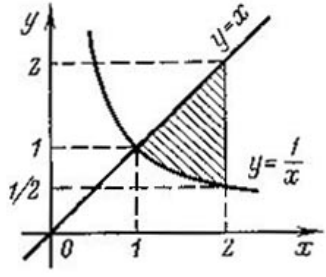


Fig. 81

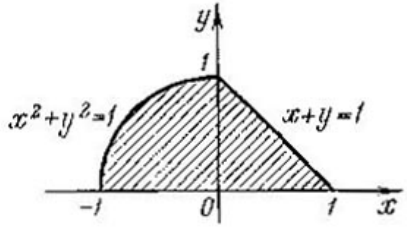


Fig. 82

$c=\frac{1}{2}$, $d=2$. Entonces

$$I=\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy=\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dy}{y^2}\int\limits_{1/y}^{2}x^2\,dx+\int\limits_1^2\frac{dy}{y^2}\int\limits_y^2 x^2\,dx.$$

Es evidente que el primer método de cálculo en este ejemplo es más conveniente que el segundo.

EJEMPLO 2. Cámbiese el orden de integración en la integral reiterada

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\ y)\,dx.$$

◀ Construyamos la región de integración G según los límites de integración: $\psi_1(y)=-\sqrt{1-y^2}$, $\psi_2(y)=1-y$, $y=0$, $y=1$

(fig. 82). Superiormente la región G está limitada por la curva

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1-x & \text{para } 0 < x < 1, \end{cases}$$

e inferiormente por la curva $y = 0$. Por esto tenemos

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)\, dy. \blacktriangleright$$

1.1. Utilizando la definición de la integral doble demuéstrense las siguientes propiedades suyas:

a) linealidad:

$$\iint_G (f(x, y) \pm g(x, y))\, dx\, dy =$$

$$= \iint_G f(x, y)\, dx\, dy \pm \iint_G g(x, y)\, dx\, dy$$

y

$$\iint_G \lambda f(x, y)\, dx\, dy = \lambda \iint_G f(x, y)\, dx\, dy \quad (\lambda \in \mathbb{R});$$

b) aditividad: si $G = G_1 + G_2$ entonces

$$\iint_G f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{G_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{G_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Calcúlense las integrales reiteradas:

1.2. $\int_0^1 dx \int_0^2 (x^2 + y)\, dy.$ **1.3.** $\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} \frac{x\, dy}{x^2 + y^2}.$

1.4. $\int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x + 2y)^2}.$

1.5 $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\, dr.$

1.6. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3\, dr.$

Para las integrales reiteradas dadas escríbanse las ecuaciones de las curvas que limitan las regiones de integración y constrúyanse estas regiones:

1.7. $\int_1^2 dx \int_x^{x+3} f(x, y)\, dy.$

1.8. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x, y)\, dy.$

1.9. $\int_0^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx.$

1.10. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\, dy.$

Para las regiones G indicadas más abajo escríbase la integral doble

$$\iint_G f(x, y)\, dx\, dy$$

en forma de integrales reiteradas tomadas en distintos órdenes

1.11. G es un rectángulo con los vértices A (1, 2), B (5, 2), C (5, 4), D (1, 4).

1.12. G es un paralelogramo limitado por las rectas $y = x$, $y = x - 3$, $y = 2$, $y = 4$.

1.13. G es una región limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 2a^2$, $x^2 = ay$ $(a > 0,\ y > 0)$.

1.14. G es una región limitada por las curvas $y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ $(a > 0,\ y > 0)$.

1.15. G es una región limitada por las curvas $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ $(a > 0,\ y > 0)$.

1.16. ¿Según qué variable está tomada la integral exterior en la integral reiterada

$$\int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^{x^3} f(x, y)\, dy\, dx?$$

¿Cuál es la región de integración?

Cámbiese el orden de integración en las siguientes integrales reiteradas:

1.17. $\int_{-1}^{6} dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.18. $\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y)\, dx.$

1.19. $\int_{0}^{4} dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.20. $\int_{0}^{1} dy \int_{y^2/9}^{y} f(x, y)\, dx + \int_{1}^{3} dy \int_{y^2/9}^{1} f(x, y)\, dx.$

1.21. $\int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{\frac{x+2}{2}} f(x, y)\, dy + \int_{2}^{10/3} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x, y)\, dy.$

1.22. $\int_{0}^{a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.23. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y)\, dx.$

1.24. $\int_{3}^{7} dx \int_{9/x}^{3} f(x, y)\, dy + \int_{7}^{9} dx \int_{9/x}^{10-x} f(x, y)\, dy.$

1.25. Muéstrese que

$$\int_{0}^{a} dx \int_{0}^{x} f(x, y)\, dy = \int_{0}^{a} dy \int_{y}^{a} f(x, y)\, dx$$

y aplicando esta fórmula, demuéstrese la *fórmula de Dirichlet*

$$\int_{0}^{t} dx \int_{0}^{x} f(y)\, dy = \int_{0}^{t} (t-y) f(y)\, dy.$$

Calcúlense las siguientes integrales:

1.26. $\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las rectas $y=x$, $x+y=2a$, $x=0$.

1.27. $\iint\limits_G \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$, donde G es un trapecio con vértices $A\,(1,\ 1)$, $B\,(5,\ 1)$, $C\,(10,\ 2)$, $D\,(2,\ 2)$.

1.28. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $x+y=2$, $x^2+y^2=2y$.

1.29. $\iint\limits_G y\,dx\,dy$, donde G es un triángulo con vértices $O\,(0,\ 0)$, $A\,(1,\ 1)$, $B\,(0,\ 1)$.

1.30. $\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$.

1.31. $\iint\limits_G (4-y)\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $x^2=4y$, $y=1$, $x=0\,(x>0)$,

1.32. $\iint\limits_G \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, donde la región G está limitada por las curvas $y=x\ \mathrm{tg}\ x$, $y=x$.

1.33. $\iint\limits_G \sqrt{a^2+x^2}\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $y^2-x^2=a^2$, $x=a$, $x=0$, $y=0\,(y>0)$.

1.34. $\iint\limits_G e^{x+y}\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $y=e^x$, $x=0$, $y=2$.

1.35*. $\iint\limits_G x^2y\,dx\,dy$, donde la región está limitada por el eje Ox y el arco de la elipse $x=a\cos t$, $y=b\,\mathrm{sen}\ t$ $(0\leqslant t\leqslant \pi/2)$.

1.36. $\iint\limits_G x\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por el eje Ox y la onda de una cicloide $x=a\,(t-\mathrm{sen}\ t)$, $y=a\,(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,

1.37. $\iint\limits_G y\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por los ejes de coordenadas y el arco de una astroide $x = a\cos^3 t, y = a\,\mathrm{sen}^3 t\ (0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$.

1.38. Hállese el valor medio de la función $f(x, y) = \cos^2 x \cos^2 y$ en la región $G = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}$.

1.39*. Estímese la magnitud de la integral

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 3} \frac{dx\,dy}{9 + \mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}^2 (x+y)}.$$

1.40. Hálleso el valor medio de la función $f(x, y) = 3x + 2y$ en el triángulo con vértices O (0, 0), A (1, 0), B (0, 1).

2. Cambio de variables en la integral doble. Supongamos que las funciones

$$x = \varphi(u, v) \text{ e } y = \psi(u, v) \tag{3}$$

realizan una aplicación biunívoca continuamente diferenciable de la región Γ del plano O_1uv sobre la región G del plano Oxy. Esto significa, que en la región G existe una aplicación continuamente diferenciable inversa $u = \eta(x, y)$ y $v = \chi(x, y)$ y en la región Γ el jacobiano de transformación es diferente de cero, es decir,

$$I(x, v) = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{matrix} \right\| \neq 0\ (u, v) \in \Gamma. \tag{4}$$

Las magnitudes u y v pueden considerarse como coordenadas rectangulares para los puntos de la región Γ y al mismo tiempo como coordenadas *curvilíneas* de los puntos de la región G.

Si en la integral doble

$$\iint\limits_G f(y, y)\,dx\,dy$$

cambiamos las variables según la fórmula (3), la región de integración de la integral obtenida será la región que al elegir adecuadamente las funciones $\varphi(u, v)$ y $\psi(u, v)$ puede resultar más simple que la región G, además tiene lugar la fórmula:

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_\Gamma f(\varphi(y, v), \psi(u, v))\,|(u, v))|\,du\,dv. \tag{5}$$

Para calcular la integral por la región Γ se emplean los métodos, expuestos en el p. 1, de reducción de la integral doble a las reiteradas.

Ejemplo 3. Calcúlese $\iint\limits_G \sqrt{xy}\,dx\,dy$ si la región G está limitada por las curvas $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = p$, $xy = q$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$.

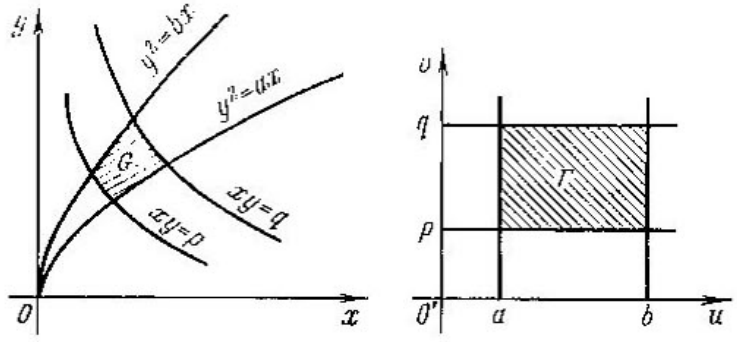


Fig. 83

◀ Pasemos a las nuevas variables u y v según las fórmulas $y^2 = ux$, $xy = v$. Entonces

$$x = u^{-1/3}v^{2/3}, \quad y = u^{1/3}v^{1/3}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3},$$

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}$$

$$|I(u, v)| = \frac{1}{3u} \text{ para } u > 0.$$

Las ecuaciones de las líneas toman la forma

$$u = a,\ u = b,\ v = p,\ v = q.$$

La región G del plano Oxy se transforma en el rectángulo Γ del plano $O'uv$ (fig. 83). Empleando la fórmula (5) obtenemos

$$\iint\limits_G \sqrt{xy}\,dx\,dy = \frac{1}{3}\iint\limits_\Gamma \sqrt{v}\,\frac{du\,dv}{u} = \frac{1}{3}\int\limits_a^b \frac{du}{u}\int\limits_p^q \sqrt{v}\,dv =$$

$$= \frac{1}{3}\ln u\Big|_a^b \cdot \frac{2}{3}v^{3/2}\Big|_p^q = \frac{2}{9}(q^{3/2} - p^{3/2})\ln\frac{b}{a}. \ ▶$$

Entre las coordenadas curvilíneas las más usadas son las coordenadas polares

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi,$$

para las cuales

$$I(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

y la fórmula (5) se escribe en forma

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_\Gamma f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \qquad (6)$$

EJEMPLO 4. Pasando a las coordenadas polares calcúlese la integral doble

$$\iint\limits_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

donde la región G está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$.

◀ Pongamos $x = r\cos\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$ y apliquemos la fórmula (6). Puesto que $x^2 + y^2 = r^2$, entonces

$$\iint\limits_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_\Gamma r^3\,dr\,d\varphi.$$

La ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$ se transforma en $r = 2a\cos\varphi$. Por esto la región Γ es la región limitada inferiormente por el eje $r = 0$, superiormente por la cosinusoide $r = 2a\cos\varphi$, con la particularidad de que $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Por consiguiente

$$\iint\limits_\Gamma r^3\,dr\,d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} r\,dr^3 =$$

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\varphi}\right) d\varphi = 4a^4 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= 8a^4 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = 8a^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^4. \blacktriangleright$$

Pásese a las coordenadas polares y determínense los límites de integración por las nuevas variables en las integrales siguientes:

1.41. $\displaystyle\int\limits_0^{3a/4} dx \int\limits_{\frac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{3a^2}{4} - x^2}}^{\sqrt{ax - x^2}} f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) dy.$

1.42. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{ax}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.43. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx.$

1.44. $\iint\limits_G f\left(\frac{y}{x}\right) dx\, dy$, donde la región G está limitada por las líneas $x^2+y^2=\sqrt{6}x$, $(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$, $y=0$ $(y\geqslant 0,\ x\leqslant\sqrt{6})$.

Pasando a las coordenadas polares calcúlense las siguientes integrales:

1.45. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dy.$

1.46. $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$

1.47. $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2-9}\, dx\, dy$ donde la región G es un anillo entre dos circunferencias $x^2+y^2=9$ y $x^2+y^2=25$.

1.48. $\iint\limits_G \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ donde la región G es una parte del círculo de radio a con el centro en el punto $O(0, 0)$, la cual está situada en el primer cuadrante.

1.49. $\iint\limits_G (x^2+y^2)\, dx\, dy$, donde la región G está limitada por las curvas $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, $y=0$ $(y>0)$.

1.50. $\iint\limits_G \frac{x\, dx\, dy}{x^2+y^2}$ donde la región G está limitada por las curvas $x^2=ay$, $x^2+y^2=2a^2$, $y=0$ $(x>0,\ a>0)$.

1.51. $\iint\limits_G x\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ donde la región G está limitada por el pétalo de la lemniscata $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$.

Pásese a las nuevas variables u y v y determínense los límites de integración en las siguientes integrales:

1.52. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ donde la región G está determinada por las desigualdades $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant a$. Pónganse $u = x + y$, $ay + uv$.

1.53. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ donde la región G está limitada por las curvas $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ $(0 < a < b)$ $0 < p < q)$. Pónganse $x^2 = uy$, $y^2 = vx$.

1.54. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{1-x}^{3-x} f(x, y)\,dy$. Pónganse $u = x + y$, $v = x - y$.

1.55. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ donde la región G está limitada por las curvas $xy = p$, $xy = q$, $y = ax$, $y = bx$ $(0 < p < q$, $0 < a < b)$. Pónganse $u = xy$, $y = vx$.

Calcúlense las siguientes integrales dobles:

1.56. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$ $(c > 1)$ donde la región G esta limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (pásese a las *coordenadas polares generalizadas* r y φ aplicando las fórmulas $x = ar \cos \varphi$, $y = br \operatorname{sen} \varphi$).

1.57. $\iint\limits_G e^{(x+y)^2}\,dx\,dy$, donde la región G está dada por las desigualdades $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$ (realícese el cambio de las variables $x = u(1 - v)$, $y = uv$).

1.58. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$ donde la región G está limitada por las líneas $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y^2 = px$, $y^2 = qa$ $(0 < a < b$, $0 < p < q)$ (escójase el cambio adecuado de las variables).

3. **Aplicaciones de las integrales dobles.** *Aplicaciones geométricas.* El *área* S de la región plana G se expresa, en función del sistema que se analiza, mediante las siguientes integrales

$$S = \iint\limits_G dx\,dy \qquad (1)$$

en las coordenadas rectangulares cartesianas,

$$S = \iint_{\Gamma} |I| \, du \, dv \tag{8}$$

en las coordenadas curvilíneas. Aquí

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ en la región } \Gamma.$$

En particular, en las coordenadas polares $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ tenemos

$$S = \iint_{\Gamma} r \, dr \, d\varphi. \tag{9}$$

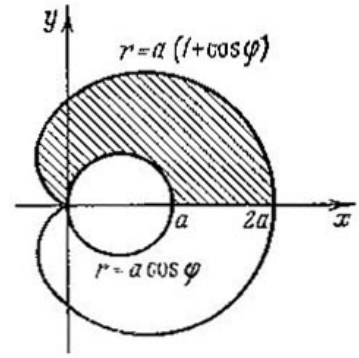


Fig. 84

EJEMPLO 5. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r = a(1 + \cos \varphi)$ y $r = a \cos \varphi$ $(a > 0)$.

◀ En el plano Oxy la figura está representada en la fig. 84. Calcúlese por la fórmula (9) el área de la parte superior y dóblese:

$$S = 2 \iint_{\Gamma} r \, dr \, d\varphi = 2 \int_{0}^{\pi/2} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^{a(1+\cos \varphi)} r \, dr +$$

$$+ 2 \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{a(1+\cos \varphi)} r \, dr = \int_{0}^{\pi/2} \left(r^2 \Big|_{a \cos \varphi}^{a(1+\cos \varphi)} \right) d\varphi +$$

$$+ \int_{\pi/2}^{\pi} \left(r^2 \Big|_{0}^{a(1+\cos \varphi)} \right) d\varphi = a^2 \int_{0}^{\pi/2} (1 + 2 \cos \varphi) \, d\varphi +$$

$$+ a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) \, d\varphi = a^2 (\varphi + 2 \operatorname{sen} \varphi) \Big|_{0}^{\pi/2} +$$

$$+ a^2 \left(\frac{3\varphi}{2} + 2 \operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\varphi \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{5}{4} \pi a^2. \ ▶$$

Si la superficie suave tiene la ecuación $z = f(x, y)$, entonces el *área* de una parte de esta *superficie* que se proyecta en la región G del plano Oxy es igual a

$$Q = \iint_{G} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} \, dx \, dy \tag{10}$$

(la función $z = f(x, y)$ es unívoca en la región G).

EJEMPLO 6. Hállese el área de una parte de la superficie del paraboloide $y^2 + z^2 = 2ax$ que se encuentra entre el cilindro $y^2 = ax$ y el plano $x = a$ $(a > 0)$.

◀ La mitad superior del paraboloide dado se describe por la ecuación $z = \sqrt{2ax - y^2}$. Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{\sqrt{2ax - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{2ax - y^2}},$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{a^2 + y^2}{2ax - y^2} = \frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}.$$

Ya que la superficie que se examina es también simétrica respecto al plano Oyz, entonces el área buscada se calcula como el área cuadri-

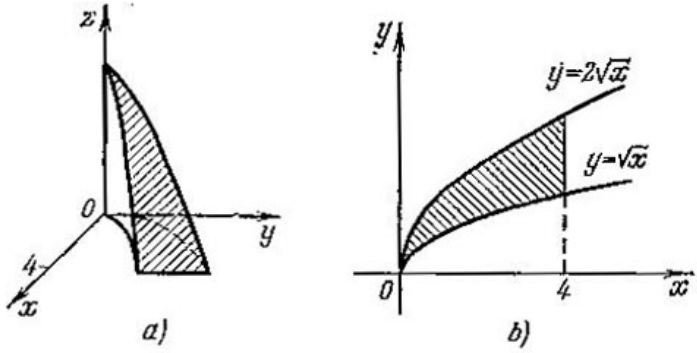


Fig. 85

plicada de una parte de esta superficie situada en el primer octante:

$$Q = 4 \iint_G \sqrt{\frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}}\, dx\, dy = 4 \int_0^a \sqrt{2ax + a^2}\, dx \int_0^{\sqrt{ax}} \times$$

$$\times \frac{dy}{\sqrt{2ax - y^2}} = 4 \int_0^a \sqrt{2ax + a^2} \left(\arcsen \frac{y}{\sqrt{2ax}} \Big|_0^{\sqrt{ax}} \right) dx =$$

$$= 4 \int_0^a \sqrt{2ax + a^2}\, \frac{\pi}{4}\, dx = \frac{\pi}{3a} (2ax + a^2)^{3/2} \Big|_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{3a} (3\sqrt{3}\, a^3 - a^3) = \frac{\pi a^2}{3} (3\sqrt{3} - 1). \blacktriangleright$$

El *volumen V del cilindro* limitado superiormente por la superficie continua $z = f(x, y)$, inferiormente por el plano $z = 0$ y por los lados mediante la superficie cilíndrica plana que corta en el plano Oxy la

región G, se expresa por la integral

$$V = \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy \qquad (11)$$

(la función $f(x, y) \geqslant 0$ es unívoca en la región G).

EJEMPLO 7. Hállese el volumen de cuerpo limitado por las superficies $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$.

◀ El cuerpo dado es un cilindroide limitado superiormente por el plano $x + z = 4$, inferiormente por el plano $z = 0$ y por los lados mediante los cilindros rectos $y = \sqrt{x}$ e $y = 2\sqrt{x}$ (fig. 85, a). La región de integración está representada en la fig. 85, b.

Tenemos: $z = 4 - x$,

$$V = \iint\limits_G (4 - x)\, dx\, dy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4 - x)\, dy =$$

$$= \int\limits_0^4 (4 - x)(2\sqrt{x} - \sqrt{x})\, dx = \int\limits_0^4 (4 - x)\sqrt{x}\, dx =$$

$$= \left(4 \cdot \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{2x^{5/2}}{5}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{128}{15}. \blacktriangleright$$

1.59. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = 4ax + 4a^2$ y $x + y = 2a$ $(a > 0)$.

1.60. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $xy = 4$ y $x + y = 5$.

1.61. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, $x = 2y$, $x = 0$ $(a > 0)$.

1.62*. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2bx$, $y = x$, $y = 0$ $(0 < a < b)$.

1.63. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r = a(1 - \cos\varphi)$ y $r = a$ (fuera de la cardioide).

1.64. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ y $x^2 + y^2 = 2ax$.

1.65*. Hállese el área de la figura limitada por el bucle de la curva $(x + y)^4 = ax^2 y$ que se encuentra en el primer cuadrante $(a > 0)$.

1.66*. Hállese el área de la figura limitada por la curva $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{c^2}$.

1.67*. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $my^2 = x^3$, $ny^2 = x^3$ $(0 < a < b$, $(0 < m < n)$.

1.68*. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $y = ax$, $y = bx$ $(0 < p < q$, $0 < a < b)$.

1.69. Hállese el área de una parte del plano $x + y + z = a$, que está cortada por el cilindro $y^2 = ax$ y el plano $x = a$.

1.70. Hállese el área de una parte de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está cortada por el cilindro $y^2 = a(a - x)$.

1.71. Hállese el área de una parte de la superficie del cono $x^2 + z^2 = y^2$ que está cortada por el cilindro $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

1.72. Hállese la superficie total del cuerpo limitado por los cilindros $x^2 = ay$, $z^2 = ay$ y el plano $y = 2a$ $(a > 0)$.

1.73. Hállese el área de una parte de la superficie del cono $x^2 + z^2 = y^2$ que está cortada por los planos $x = 0$, $x + y = 2a$, $y = 0$.

1.74. Hállese el área de una parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ que está cortada por el cilindro $z^2 = 2a(2a - x)$.

1.75. Hállese el área de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ que está dentro del cono $x^2 + y^2 = z^2$.

1.76. Hállese el área de una parte de la superficie del paraboloide $z = x^2 - y^2$ que está entre los paraboloides $z = 3x^2 + y^2 - 2$ y $z = 3x^2 + y^2 - 4$.

1.77. Hállese el área de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se corta por el cilindro con las generatrices paralelas al eje Oz; la rosácea de tres pétalos $r = a \operatorname{sen} 3\varphi$ sirve de directriz de éste.

1.78. Hállese el área de una parte de la superficie helicoidal $z = a \operatorname{arctg} x$ que se corta por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

1.79. Hállese el área de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ situada entre los planos $z = \frac{\sqrt{3}}{3}y$ y $z = y$ $(z \geqslant 0$, $y \geqslant 0)$.

1.80. Hállese el área de una parte de la superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que se corta por un cilindro con generatrices paralelas al eje Oz; la cardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$ sirve de directriz de éste.

1.81. Hállese el área de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se corta de ésta por el cilindro $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

Hállense los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies indicadas:

1.82. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0)$.

1.83*. $z^2 - x^2 = a^2$, $z^2 - y^2 = a^2$, $z = a\sqrt{2}$ $(a > 0)$.

1.84. $y = x^2$, $z = y$, $z + y = 2$.

1.85. $x^2 - y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ (dentro del cilindro; $a > 0$).

1.86. $x^2 + y^2 - 2z^2 = -a^2$, $2(x^2 + y^2) - z^2 = a^2$ $(a > 0)$.

1.87. $z = ce^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

1.88. $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 - 2z^2 = -a^2$ $(a > 0)$.

1.89. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

1.90*. $z = xy$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y^2 = x$, $y^2 = 3x$.

1.91*. $z = x^2 + y^2$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$, $(x > 0,\ y > 0)$.

APLICACIONES MECÁNICAS. Si una placa ocupa la región G del plano Oxy y tiene una densidad superficial variable $\gamma = \gamma(x, y)$, entonces la *masa* M de la placa y sus *momentos estáticos* M_x y M_y respecto a los ejes Ox y Oy se expresan mediante integrales dobles

$$M = \iint\limits_G \gamma(x, y)\, dx\, dy,$$

$$M_x = \iint\limits_G y\gamma(x, y)\, dx\, dy, \tag{12}$$

$$M_y = \iint\limits_G x\gamma(x, y)\, dx\, dy.$$

Las coordenadas del *centro de masas* $\bar{x}$ e $\bar{y}$ de la placa se determinan del modo siguiente:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_G x\gamma(x, y)\, dx\, dy}{\iint\limits_G \gamma(x, y)\, dx\, dy}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint\limits_G y\gamma(x, y)\, dx\, dy}{\iint\limits_G \gamma(x, y)\, dx\, dy}. \tag{13}$$

Los *momentos de inercia* de la placa respecto a los ejes Ox y Oy son, respectivamente, iguales a

$$I_x = \iint\limits_G y^2 \gamma(x, y)\, dx\, dy, \qquad I_y = \iint\limits_G x^2 \gamma(x, y)\, dx\, dy, \tag{14}$$

y el momento de inercia respecto al origen de coordenadas (momento de inercia *polar*) es igual

$$I_O = \iint\limits_G (x^2 + y^2)\, \gamma(x, y)\, dx\, dy = I_x + I_y. \tag{15}$$

Si la placa es homogénea entonces en las fórmulas (12)—(15) se debe poner $\gamma(x, y) = 1$.

EJEMPLO 8. Hállense las coordenadas del centro de masas de la placa homogénea limitada por las curvas $ay = x^2$, $x + y = 2a$ $(a > 0)$.

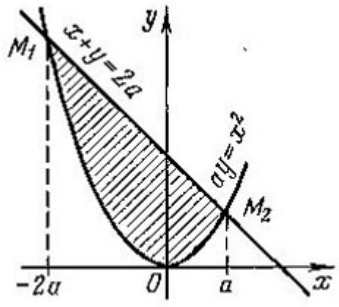


Fig. 86

◀ Las líneas se cortan en los puntos $M_1(-2a, 4a)$, $M_2(a, a)$ (fig. 86). Por esto se puede escribir:

$$S = \iint\limits_G dx\, dy = \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{x^2/a}^{2a-x} dy = \int\limits_{-2a}^{a} \left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right) dx =$$

$$= \left(2ax - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{9}{2}\, a^2;$$

$$M_x = \iint\limits_G y\, dx\, dy = \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{x^2/a}^{2a-x} y\, dy = \frac{1}{2} \int\limits_{-2a}^{a} \left((2a - x)^2 - \frac{x^4}{a^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(2a-x)^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{36}{5}\, a^3;$$

$$M_y = \iint\limits_G x\,dx\,dy = \int\limits_{-2a}^{a} x\,dx \int\limits_{x^2/a}^{2a-x} dy = \int\limits_{-2a}^{a} x\,(2a - x - x^2/a)\,dx =$$

$$= \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = -\frac{9}{4}\,a^3.$$

Sustituyendo los valores hallados en la fórmula (13) tenemos

$$\bar{x} = \frac{M_y}{S} = -\frac{a}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{S} = \frac{8}{5}\,a. \blacktriangleright$$

1.92. Hállese la masa de una placa redonda de radio R si su densidad es proporcional al cuadrado de la distancia del punto hasta el centro y es igual a δ en el borde de la placa.

1.93. Hállense los momentos estáticos respecto a los ejes Ox y Oy de la figura homogénea limitada por la cardioide $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ y el eje polar.

1.94. Hállense las coordenadas del centro de masas de una figura homogénea limitada por las curvas $y^2 = ax$, $y = x$.

1.95. Hállese la masa de una placa que tiene forma de un triángulo rectángulo con catetos $OB = a$ y $OA = b$, si la densidad en cualquier punto es igual a la distancia del punto hasta el cateto OA.

1.96. Hállense los momentos estáticos respecto a los ejes Ox y Oy de una figura homogénea limitada por la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ y la recta OA que pasa por el origen de coordenadas y el vértice $A\ (\pi/2,\ 1)$ de la sinusoide.

1.97. Hállense las coordenadas del centro de masas de una figura homogénea limitada por las curvas $xy = a^2$, $y^2 = 8ax$, $x = 2a$ $(a > 0)$.

1.98. Hállense los momentos de inercia de un triángulo homogéneo limitado por las rectas $x + y = 1$, $x + 2y = 2$, $y = 0$ respecto a los ejes Ox y Oy.

1.99. Hállense las coordenadas del centro de masas de una figura homogénea limitada por el bucle de la curva $r = a \operatorname{sen} 2\varphi$ que está situado en el primer cuadrante.

1.100. Hállense los momentos de inercia de una figura homogénea limitada por la cardioide $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ con respecto a los ejes Ox, Oy y con respecto al polo.

1.101. Hállense los momentos de inercia de una figura homogénea limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con respecto a los ejes Ox, Oy y con respecto al origen de coordenadas.

1.102*. Hállense los momentos de inercia de una figura homogénea limitada por las curvas $y^2 = ax$, $y = a$, $x = 0$:

a) respecto al origen de coordenadas,

b) respecto a la recta $x = -a$.

1.103. Hállense los momentos de inercia de un triángulo limitado por las rectas $x + y = a$, $x = a$, $y = a$, con respecto a los ejes Ox, Oy y con respecto al origen de coordenadas, si la densidad es proporcional a la ordenada del punto.

1.104. Hállese el momento de inercia de una figura homogénea limitada por la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ respecto al polo.

1.105. Hállense los momentos de inercia de un sector circular homogéneo de radio a, con el ángulo α en el vértice (que coincide con el origen de coordenadas), con respecto a los ejes Ox y Oy.

1.106*. Una placa fina tiene forma de anillo circular con radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$). El calor específico de la placa varía según la ley $c = |xy|$, la densidad es constante e igual a γ. Hállese la cantidad de calor Q recibida por la placa al calentarla desde la temperatura t_1 hasta la temperatura t_2.

1.107*. Sobre una placa fina que tiene forma de segmento parabólico con base $2a$ y altura h, está distribuida una carga eléctrica con una densidad superficial de $\sigma = 2x + y$. Hállese la carga total E de la placa.

§ 2. Integral triple

1. La integral triple y su cálculo en coordenadas rectangulares cartesianas. Se llama *integral triple* de una función continua $f(x, y, z)$ sobre una región espacial cerrada y acotada T, al límite de la sucesión de las sumas integrales tridimensionales correspondientes, cuando el mayor de los diámetros d_k de las regiones elementales Δv_k tiende al cero, si este límite no depende ni del procedimiento de partición de la región T en subregiones elementales Δv_k, ni de la elección de los puntos intermedios:

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta v_k, \qquad (1)$$

donde $(x_k, y_k, z_k) \in \Delta v_k$. Con Δv_k se designa tanto la región elemental, como su volumen. Las propiedades de las integrales triples son semejantes a las de integrales dobles.

El cálculo de la integral triple en coordenadas cartesianas se reduce al cálculo sucesivo de una integral simple y una integral doble o al cálculo de tres integrales simples. Si, por ejemplo, la región de integración T está acotada por abajo por la superficie $z = \varphi_1(x, y)$,

por arriba por la superficie $z = \varphi_2(x, y)$ ($\varphi_1(x, y) \leqslant \varphi_2(x, y)$) y por los lados mediante los cilindros rectos, cuya sección por el plano Oxy es la región G, entonces la integral triple (1) se calcula por la fórmula

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_G dx\,dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (2)$$

Escribiendo la integral doble respecto a la región G con ayuda de una de las integrales reiteradas, obtenemos:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (3)$$

EJEMPLO 1. Calcúlese $\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$ si la región T está limitada por los planos $x+y+z=1$, $z=0$, $y=0$, $x=0$.

◀ Tenemos

$$\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} z\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{1-x-y} \right) dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(-\frac{(1-x-y)^3}{3} \Big|_{y=0}^{1-x} \right) dx = \frac{1}{6} (1-x)^3\,dx =$$

$$= \frac{1}{6} \left(-\frac{(1-x)^4}{4} \Big|_{x=0}^{1} \right) = \frac{1}{24}. \blacktriangleright$$

Pónganse los límites de integración en la integral triple $\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ para las regiones indicadas T:

2.1. La región T es un tetraedro limitado por los planos $2x + 3y + 4z = 12$, $z = 0$, $x = 0$.

2.2. La región T es el interior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2.3. La región T está limitada por las superficies $y^2 + 2z^2 = 4x$, $x = 2$.

Calcúlense las integrales:

2.4. $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz$.

2.5. $\iiint_T (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, donde T es un tetraedro limitada por los planos $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2.6. $\int_0^3 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{\sqrt{xy}} z\,dz$.

2.7. $\iiint_T xyz\,dx\,dy\,dz$, donde la región T está limitada por las superficies $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$.

2. Cambio de variables en la integral triple. Si en la integral triple

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

se cambian las variables según las fórmulas $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ y además las funciones $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, w, v)$ realizan una aplicación biunívoca de la región T del espacio $Oxyz$ sobre la región T_1 del espacio O_1uvw y el jacobiano de transformación no se anula en la región T_1:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces es válida la fórmula

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{T_1} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \mid I \mid du\,dv\,dw. \qquad (4)$$

Las coordenadas curvilíneas más usadas son las coordenadas *cilíndricas* r, φ, z (fig. 87): $x = r\cos\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$, $z = z$, cuyo jacobiano es $I = r$, y las coordenadas *esféricas* r (longitud del radio vector), φ

(longitud), θ (latitud) (fig. 88): $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $z = r\operatorname{sen}\theta$, cuyo jacobiano $J = r^2\cos\theta$. La fórmula (4) toma, respectivamente, la forma

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T_1} f(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi,\ z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz \qquad (5)$$

o

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{T_1} f(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta)\,r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta. \qquad (6)$$

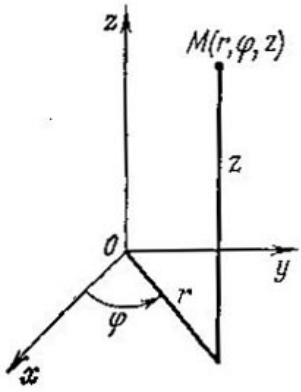


Fig. 87

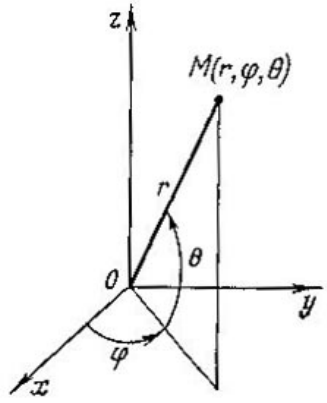


Fig. 88

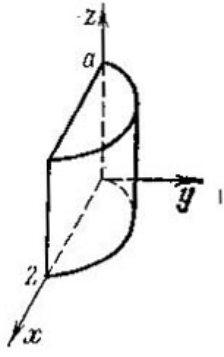


Fig. 89

EJEMPLO 2. Pasando a las coordenadas cilíndricas calcúlese $\iiint_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, donde la región T está dada por las desigualdades $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}$, $0 \leqslant z \leqslant a$ (fig. 89).

◀ Ya que la igualdad $y = \sqrt{2x - x^2}$ en el sistema de coordenadas cilíndricas toma la forma $r = 2\cos\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$, entonces según la fórmula (5)

$$\iiint_T \sqrt{x^2+y^2}\,z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T_1} r^2 z\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr \int_0^a z\,dz = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr =$$

$$= \frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{8}{9}a^2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Pasando a las coordenadas esféricas calcúlese $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, si la región T es una semiesfera $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$.

◀ Para la región T_1 los límites de variación de las coordenadas esféricas son: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant r \leqslant R$. Según la fórmula (6) tenemos:

$$\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{T_1} r^2\cos^2\theta \cdot r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\theta\,d\theta \int\limits_0^R r^4\,dr = \frac{4}{15}\pi R^5. \blacktriangleright$$

Calcúlense los integrales:

2.8. $\int\limits_0^{a/\sqrt{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int\limits_0^{(x^2-y^2)/a} \sqrt{x^2+y^2}\,dz$, pasando a las coordenadas cilíndricas.

2.9*. $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ pasando a las coordenadas esféricas, si T es el interior del sector esférico con el centro en el origen de coordenadas, radio a y el ángulo en el vértice 2α $(0<\alpha<\pi)$.

2.10. $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{\frac{h}{a^2}(x^2+y^2)}^{h} \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pasando a las coordenadas cilíndricas.

2.11. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, pasando a las coordenadas esféricas.

3. Aplicaciones de las integrales triples. El *volumen* V de una región espacial T es igual a

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz.$$

La *masa* M de un cuerpo con densidad variable $\gamma(x, y, z)$ que ocupa la región T es:

$$M = \iiint_T \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Los *momentos estáticos* de un cuerpo, respecto a los planos coordenados son:

$$M_{yz} = \iiint_T x\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$M_{zx} = \iiint_T y\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$M_{xy} = \iiint_T z\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Las *coordenadas del centro de masas* de un cuerpo son

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Los *momentos de inercia* de un cuerpo respecto a los ejes de coordenadas son

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_y = \iiint_T (z^2 + x^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Si el cuerpo es homogéneo entonces en las fórmulas indicadas más arriba hay que poner $\gamma(x, y, z) = 1$.

EJEMPLO 4. Hállense las coordenadas del centro de masas de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$, si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia de este punto hasta el centro.

◀ Tenemos $\gamma(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y a consecuencia de la simetría $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Realicemos los cálculos en las coordenadas

esféricas:

$$M_{xy} = k \iiint_T z \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = k \iiint_{T_1} r^4 \times$$

$$\times \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta \int_0^R r^4\, dr = \frac{1}{5} k\pi R^5.$$

$$M = k \iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = k \iiint_{T_1} r^3 \times$$

$$\times \cos\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^R r^3\, dr =$$

$$= \frac{1}{2} k\pi R^4; \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{2}{5} R.$$

De este modo $C\left(0,\ 0,\ \frac{2}{5} R\right)$. ▶

2.12. Hállese el volumen de un cuerpo limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$, $y^2 = x$.

2.13*. ¿Para qué valores de a el volumen de un cuerpo limitado por las superficies $x^2 + y^2 = az$, $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$ es igual al número dado V?

2.14*. Hállese el volumen de un cuerpo limitado por la superficie cerrada $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2\ axyz$ $(a > 0)$.

2.15*. Hállese el volumen de un cuerpo limitado por la superficie cerrada $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

2.16.* Hállese el volumen de un cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 3az$ (dentro del paraboloide).

2.17*. Hállese el volumen de un cuerpo limitado por la superficie cerrada $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$ $(a > 0)$.

2.18. Hállense la masa y la densidad media de un cuerpo limitado por las superficies $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$, $z = a > 0$, si la densidad en cada punto es proporcional a la coordenada z y en el plano $z = a$ es igual a γ_0.

2.19. Hállense la masa y la densidad media de un cono circular que tiene por radio de la base R y por altura H, si la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la

distancia del punto hasta el plano que pasa por el vértice del cono paralelamente al plano de base y en el centro de la base es igual a γ_0.

2.20. Hállense la masa y la densidad media de un cuerpo limitado por las superficies $x^2 - y^2 = az$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ $(z > 0)$ si la densidad en cada punto es proporcional a la coordenada z y el valor máximo de la densidad es igual a γ_0.

2.21. Hállense la masa y la densidad media de la capa esférica entre las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, si la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia del punto hasta el origen de coordenadas y el valor máximo de la densidad es igual a γ_0.

2.22. Hállense la masa y la densidad media del segmento del paraboloide de revolución que tiene por radio de la base R y por altura H, si la densidad en cada punto es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde el punto hasta el plano de la base del segmento y en el vértice del segmento es igual a γ_0.

2.23. Hállense la masa y la densidad media de una bola de radio R, si la densidad en cada punto es inversamente proporcional a la distancia desde el punto hasta uno de los diámetros de la bola y en la circunferencia del círculo grande situado en el plano perpendicular a este diámetro es igual a γ_0.

2.24. Hállense las coordenadas del centro de masas de un cuerpo homogéneo limitado por las superficies $z = \frac{h}{a^2}(y^2 - x^2)$, $z = 0$, $y = a$, $y = 0$ $(a > 0, h > 0)$.

2.25. Hállense las coordenadas del centro de masas de un cuerpo homogéneo limitado por las superficies $y = \frac{b}{a^2}x^2$, $z = \frac{h}{b}(b - y)$, $z = 0$ $(a > 0, b > 0, h > 0)$.

2.26. Hállense las coordenadas del centro de masas de un cuerpo homogéneo limitado por las superficies $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$, $z = H$.

2.27. Hállense las coordenadas del centro de masas de un cuerpo homogéneo limitado por las superficies $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = H$ $(H > 0, R > 0)$.

2.28. Hállense las cordenadas del centro de masas de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$, si la densidad en cada

punto es inversamente proporcional a la distancia del punto hasta el origen de coordenadas.

2.29. Hállese el momento de inercia con respecto al eje Oz del cuerpo homogéneo de densidad γ, limitado por las superficies $y = \frac{b}{a^2}x^2$, $z = 0$, $z = \frac{h}{b}(b - y)$ $(a > 0,\ b > 0,\ h > 0)$.

2.30. Hállese el momento de inercia del segmento homogéneo del paraboloide de revolución de densidad γ y de radio de la base R y altura H, respecto a su eje de revolución.

2.31. Hállese el momento de inercia de una esfera de radio R con respecto a su diámetro, si la densidad en cada punto es inversamente proporcional a la distancia del punto hasta el centro de la esfera y en la superficie de la esfera es igual a γ_0.

2.32.** Hállese el potencial de Newton U de un cuerpo homogéneo de densidad γ, limitado por el elipsoide de revolución $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, en su centro $(b > a)$.

2.33.** Hállese la fuerza de atracción que ejerce un cono homogéneo de densidad γ, altura H y radio de la base R sobre el punto material situado en su vértice y que contiene una unidad de masa.

2.34. Hállese el momento de inercia respecto al eje Oz de un cuerpo homogéneo de densidad γ, limitado por las superficies $z = \frac{h}{a^2}(y^2 - x^2)$, $z = 0$, $y = \pm a$.

2.35. Hállese el momento de inercia del cono circular homogéneo de densidad γ, radio de la base R y altura H con respecto a su eje.

§ 3. Integrales múltiples impropias

1. Integral respecto a la región infinita. Si la función $f(x, y)$ es continua en una región infinita G, entonces, según la definición,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{D \to G} \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \qquad (1)$$

donde D es una región finita que está situada totalmente en la región G, además $D \to G$ significa que la región D se extiende arbitrariamente de tal modo que entre y quede en ella cualquier punto de la región G (*extensión exhaustiva*). Si existe un límite finito (1) que no

depende de la elección de la subregión D y del procedimiento de extensión $D \to G$, entonces la *integral impropia* $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ se llama *convergente*; en el caso contrario, *divergente*.

Análogamente se determina la integral triple por la región infinita.

Si $f(x, y) \geqslant 0$, entonces para la convergencia de la integral impropia es necesario y suficiente que el límite (1) exista por lo menos para una sola extensión exhaustiva de la región G.

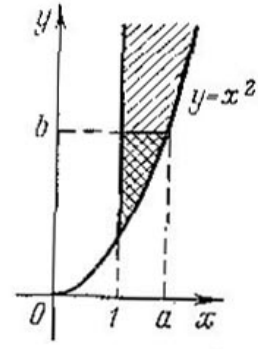


Fig. 90

EJEMPLO 1. Calcúlese la integral impropia

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$$

donde G es una región determinada por las desigualdades $x \geqslant 1$, $y \geqslant x^2$.

◀ Supongamos que la subregión D (fig. 90) está dada por las desigualdades $1 \leqslant x \leqslant a$, $x^2 \leqslant y \leqslant b$, donde $a \to +\infty$, $b \to +\infty$. Entonces

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^4+y^2} = \lim_{D \to G} \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{a \to +\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_1^a dx \int\limits_{x^2}^b \frac{dy}{x^4+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{a \to +\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_1^a \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x^2} \Big|_{x^2}^b \right) dx =$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \int\limits_1^a \frac{1}{x^2} \left(\lim_{b \to +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{x^2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \lim_{a \to +\infty} \int\limits_1^a \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} \lim_{a \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^a \right) = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales impropias:

3.1. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^5y^3}$, donde G es una región determinada por las desigualdades $x \geqslant 1$, $xy \geqslant 1$.

3.2. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^3}$, donde G es una región determinada por las desigualdades $x^2+y^2 \geqslant 1$ (parte exterior del círculo).

3.3. $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, donde T es una región determinada por la desigualdad $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$ (parte exterior de la esfera).

3.4. $\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+y+z)}\,dz$.

Investíguese la convergencia de las integrales impropias:

3.5. $\iint\limits_G \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde G es una región determinada por las desigualdades $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3.6. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$, donde G es una región determinada por la desigualdad $x^2+y^2 \geqslant 1$ [(parte exterior del círculo).

2. Integral de una función discontinua. Sea la función $f(x, y)$ continua en la región cerrada y acotada G en todos los puntos, excepto el punto $P_0(x_0, y_0)$ (o la línea L). Si existe el límite finito

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy,$$

donde G es una región obtenida de G eliminando ε-entorno del punto P_0 (ε-entorno de la línea L, respectivamente), entonces este límite se llama *integral impropia de la función $f(x, y)$ por la región G* y se designa mediante $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$, es decir,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (2)$$

La integral (2) en este caso se llama *convergente*. Si $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy$ no existe o es igual a ∞, entonces $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ se llama *divergente*.

De modo análogo se determina la integral triple de la función discontinua.

Ejemplo 2. Investíguese la convergencia de la integral impropia $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $\alpha > 0$, donde G es un círculo $x^2+y^2 \leqslant 1$.

◀ El origen de coordenadas es un punto de discontinuidad de la función $\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$. Eliminemos de G el ε-entorno del origen de coorde-

nadas. Entonces la región G_ε es un anillo entre las circunferencias de radios ε y 1. Pasemos a las coordenadas polares (Γ es una imagen polar de la región G):

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \iint\limits_\Gamma \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^{2\alpha}} = \iint\limits_\Gamma r^{1-2\alpha}\,dr\,d\varphi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} r^{1-2\alpha}\,dr\,d\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\varepsilon^1 r^{1-2\alpha}\,dr =$$

$$= 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{r^{2(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)}\Big|_\varepsilon^1 = \pi \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\varepsilon^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\alpha} & \text{para } \alpha<1, \\ -\infty & \text{para } \alpha>1. \end{cases}$$

Para $\alpha=1$ tenemos:

$$\iint\limits_\Gamma \frac{dr\,d\varphi}{r} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dr}{r} = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \ln r\Big|_\varepsilon^1 = +\infty.$$

Así pues para $\alpha<1$ la integral converge y es igual a $\dfrac{\pi}{1-\alpha}$. ▶

Calcúlense las integrales impropias:

3.7. $\iint\limits_G \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{xy}}$, donde G es un cuadrado $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

3.8. $\iint\limits_G \dfrac{dx\,dy}{\sqrt[3]{1-x^2-y^2}}$, donde G es un círculo $x^2+y^2\leqslant 1$.

3.9. $\iint\limits_G \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, donde G es un círculo $x^2+y^2\leqslant 1$.

Investíguese la convergencia de las integrales impropias:

3.10*. $\iint\limits_G \dfrac{dx\,dy}{(x-y)^\alpha}$, donde G es un triángulo $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x$.

3.11. $\iiint\limits_T \dfrac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, donde T es una esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

§ 4. Cálculo de las integrales dependientes de un parámetro

1. Integrales propias dependientes de un parámetro. Si la función $f(x, y)$ está definida y es continua en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, entonces la integral

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx \tag{1}$$

se llama *integral dependiente del parámetro* y es una función continua en el intervalo $[A, B]$.

La integral de una forma más general

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx \tag{2}$$

se llama también integral dependiente del parámetro y es una función continua del argumento y en el intervalo $[A, B]$; si $f(x, y)$ es continua en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ son continuas para $y \in [A, B]$ y sus valores se contienen en el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 1. Calcúlese el límite

$$\lim_{y \to 0} \int_{-(1+y)}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

◀ Analicemos la integral siguiente dependiente del parámetro y:

$$F(y) = \int_{-(1+y)}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

Ya que los límites de integración, así como la función subintegral son continuos para cualesquiera valores de sus argumentos, entonces $F(y)$ es una función continua. Por eso

$$\lim_{y \to 0} \int_{-(1+y)}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \lim_{y \to 0} F(y) = F(0) =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Si $f(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ son continuas en el triángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, entonces para la integral (1) es válida la *fórmula de di-*

ferenciación bajo el signo de la integral (fórmula de Leibniz):

$$F'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,\ y)\,dx=\int_a^b f'_y(x,\ y)\,dx. \tag{3}$$

Si en (2) para las mismas condiciones de f y f'_y los límites de integración $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ son diferenciables cuando $y\in(A,\ B)$, entonces es válida la fórmula:

$$F'(y)=\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,\ y)\,dx=$$

$$=f(\psi(y),\ y)\,\psi'(y)-f(\varphi(y),\ y)\,\varphi'(y)+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,\ y)\,dx. \tag{4}$$

EJEMPLO 2. Hállese $F'(y)$ si

$$F(y)=\int_{\operatorname{sen} y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}}dx.$$

◀ Ya que la función subintegral $e^{y\sqrt{1-x^2}}$ es continua en el dominio de definición junto con su derivada parcial respecto a y, igual a $\sqrt{1-x^2}\,e^{y\sqrt{1-x^2}}$ y los límites de integración son también funciones diferenciables, entonces se puede aplicar la fórmula (4):

$$F'(y)=-e^{y\sqrt{1-\cos^2 y}}\operatorname{sen} y-e^{y\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}\cos y+$$

$$+\int_{\operatorname{sen} y}^{\cos y}\sqrt{1-x^2}\,e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx=-(e^{y|\operatorname{sen} y|}\operatorname{sen} y+$$

$$+e^{y|\cos y|}\cos y)+\int_{\operatorname{sen} y}^{\cos y}\sqrt{1-x^2}\,e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx.\ \blacktriangleright$$

Si $f(x,\ y)$ es continua en el triángulo $a\leqslant x\leqslant b,\ A\leqslant y\leqslant B$, entonces para la integral (1) es válida la fórmula de *integración respecto al parámetro y bajo el signo de la integral*:

$$\int_A^B F(y)\,dy=\int_A^B dy\int_a^b f(x,\ y)\,dx=\int_a^b dx\int_A^B f(x,\ y)\,dy. \tag{5}$$

EJEMPLO 3. Calcúlese la integral

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx\qquad(b>a>0),$$

◀ Observemos que

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y \, dy.$$

Entonces la integral buscada toma el aspecto

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx = \int_a^b dx \int_a^b x^y \, dy.$$

La función subintegral $f(x, y) = x^y$ es continua en el triángulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $a \leqslant y \leqslant b$, por eso se puede utilizar la fórmula (5):

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y \, dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \, dx = \int_a^b \frac{1}{y+1} \, dy = \ln \frac{b+1}{a+1}. \blacktriangleright$$

Calcúlense los siguientes límites:

4.1. $\lim\limits_{y \to 0} \int_1^2 x^3 \cos xy \, dx.$

4.2. $\lim\limits_{y \to 0} \int_0^1 \sqrt[3]{x^4 + y^2} \, dx.$

4.3. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^{x_0} (f(x+h) - f(x)) \, dx$, si $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ $(a < 0 < x_0 < b)$ y $f(0) = 0$.

Diferénciense las funciones:

4.4. $F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} \, dx.$

4.5. $F(y) = \int_{y-1}^{y+1} \frac{\operatorname{sen} xy}{x} \, dx.$

4.6. $F(y) = \int_y^{y^2} e^{-yx^2} \, dx.$

4.7. $F(y) = \int_0^y (x - y) \operatorname{sen} xy \, dx.$

4.8. Hállese F''_{xy}, si

$$F(x, y) = \int_{x/y}^{xy} (x - yt)\, f(t)\, dt,$$

donde $f(t)$ es una función diferenciable.

4.9. Sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable y $F(x)$ una función diferenciable. Demuéstrese que la función

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - at) + f(x + at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(y)\, dy$$

satisface la ecuación de oscilaciones de una cuerda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

4.10*. Hállense las derivadas de las integrales elípticas totales

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi,$$

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \qquad (0 < k < 1)$$

y exprésense mediante las funciones $E(k)$ y $F(k)$.

Integrando bajo el signo de la integral calcúlense las integrales:

4.11. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\ln x}(x^2 - 1)\, dx.$

4.12. $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\ln x}(x - 1)\, dx.$

4.13. Demuéstrense las fórmulas:

a) $\displaystyle\int_0^h F(x)\, x\, dx = E(k) - (1 - k^2) F(k),$

b) $\displaystyle\int_0^h E(x)\, x\, dx = \frac{1}{3}((1 + k^2) E(k) - (1 - k^2) F(k)),$

donde $E(k)$ y $F(k)$ son integrales elípticas totales (véase el problema 4.10).

2. **Integrales impropias dependientes de un parámetro.** La integral impropia que depende del parámetro y, es decir,

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx, \tag{6}$$

donde la función $f(x, y)$ es continua en la región $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ se llama uniformemente convergente en el intervalo $[y_1, y_2]$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $B = B(\varepsilon)$ tal que para cualquier $b \geqslant B(\varepsilon)$

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| \leqslant \varepsilon$$

para cualquier $y \in [y_1, y_2]$.

Si la integral (6) es convergente uniformemente en el intervalo $[y_1, y_2]$, entonces es una función continua y en este intervalo.

De modo análogo se define la convergencia uniforme de la integral impropia de la función no acotada, que depende del parámetro.

Al investigar la convergencia uniforme de las integrales dependientes del parámetro, a menudo se emplea la siguiente afirmación:

CRITERIO DE WEIERSTRASS. *Para que la integral* (6) *converja uniformemente es suficiente que exista una función* $F(x)$ *independiente del parámetro* y, *tal que*

a) $|f(x, y)| \leqslant F(x)$ *si* $a \leqslant x < +\infty$,

b) $\int_a^{+\infty} F(x)\, dx < +\infty$.

La función $F(x)$ se llama *mayorante* para $f(x, y)$.

EJEMPLO 4. Demuéstrese la convergencia uniforme de la integral siguiente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx, \quad -\infty < y < +\infty.$$

◀ Observemos que

$$\int \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitratio. Suponiendo $B(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$, hallamos (para cualquier $b > B$):

$$\left| \int_b^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right| = \left| \lim_{A \to +\infty} \int_b^A \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right| =$$

$$= \left| \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \Big|_b^A \right) \right| = \left| \lim_{A \to +\infty} \frac{A}{A^2+y^2} - \frac{b}{b^2+y^2} \right| =$$

$$= \frac{b}{b^2+y^2} \leqslant \frac{1}{b} < \frac{1}{B} = \varepsilon,$$

lo que demuestra según la definición la convergencia uniforme de la integral indicada respecto al parámetro y por todo el eje. ▶

EJEMPLO 5. Establézcase la convergencia uniforme de la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \cos x\, dx, \qquad 0 < y_0 \leqslant y < +\infty.$$

◀ Mostremos que podemos tomar la fnución $F(x) = e^{-xy_0}$ en calidad de mayorante. En efecto, si $y > y_0$ entonces

$$| e^{-xy} \cos x | \leqslant e^{-xy} \leqslant e^{-xy_0}.$$

Además,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy_0}\, dx = -\frac{1}{y_0} e^{-xy_0} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y_0}.$$

Por consiguiente, basándose en el criterio de Weierstrass la integral indicada converge uniformemente. ▶

Para las integrales impropias dependientes de un parámetro, con un límite infinito, al cumplirse las siguientes condiciones:

a) la función $f(x, y)$ es continua junto con su derivada $f'_y(x, y)$ en la región $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$,

b) $\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ converge para cualquier $y \in [y_1, y_2]$,

c) $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\, dx$ converge uniformemente en el intervalo $[y_1, y_2]$

es válida la *fórmula de diferenciación respecto al parámetro (fórmula de Leibniz)*:

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\, dx \tag{7}$$

que es análoga a la relación (3).

Cumpliéndose las condiciones correspondientes la fórmula de Leibniz queda válida también para la integral de la función discontinua, dependiente del parámetro.

EJEMPLO 6. Calcúlese la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx\, dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

◀ Sea

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx\, dx = F(\alpha, \beta).$$

Señalemos que la integral $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos mx\, dx$ converge uniformemente para $\alpha > 0$ y es igual a $\frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2}$ (¡compruébese!). La integral inicial converge para cualesquiera $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ y la función subintegral es continua junto con su derivada parcial por α, igual a $-e^{-\alpha x} \cos mx$. Por consiguiente las condiciones a), b), c) están cumplidas y se puede utilizar la relación (7). Entonces

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos mx\, dx = -\frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2}.$$

De aquí

$$F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \ln (\alpha^2 + m^2) + C(\beta).$$

Para hallar $C(\beta)$ suponemos en la última igualdad $\alpha = \beta$. Tenemos $0 = -\frac{1}{2} \ln (\beta^2 + m^2) + C(\beta)$. De aquí

$$C(\beta) = \frac{1}{2} \ln (\beta^2 + m^2)$$

ó

$$F(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} (\ln (\beta^2 + m^2) - \ln (\alpha^2 + m^2)) = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2 + m^2}{\alpha^2 + m^2}. \blacktriangleright$$

4.14. Formúlese en el lenguaje «$\varepsilon - \delta$» la afirmación: la integral $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ converge no uniformemente en el segmento $[y_1, y_2]$.

Investíguense con respecto a la convergencia uniforme en los intervalos indicadas las siguientes integrales:

4.15. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos x\,dx \quad (0<\alpha_0\leqslant\alpha<\infty)$.

4.16. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha+1} \quad (1<\alpha<+\infty)$.

4.17. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^2}\,dx \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1)$.

4.18. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx \quad (-\infty<\alpha<+\infty)$.

4.19. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} \quad (0\leqslant\alpha<+\infty)$.

4.20. $\int_0^2 \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \quad \left(|\alpha|<\frac{1}{2}\right)$.

4.21. $\int_0^1 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,\frac{dx}{x^\alpha} \quad (0<\alpha<2)$.

4.22. $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1)$.

4.23. Domuéstrese que la función $u(x, y)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xf(t)}{x^2+(y-t)^2}\,dt$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Aplicando la diferenciación por el parámetro, calcúlense las integrales siguientes:

4.24. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0)$.

4.25. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\operatorname{sen} mx\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0,\ m\neq 0)$.

4.26. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen} \beta x}{x}\, dx \quad (\alpha \geqslant 0).$

4.27. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\, dx \quad (\alpha > -1).$

4.28*. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma x^2} \cos \delta x\, dx \quad (\gamma > 0).$

4.29. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty).$

4.30. $\int\limits_0^1 \frac{\ln (1-\alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad (|\alpha| \leqslant 1).$

4.31. $\int\limits_0^1 \frac{\ln (1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad (|\alpha| \leqslant 1).$

RESPUESTAS

1.2. $\frac{8}{3}$. **1.3.** $\frac{\pi}{6}$. **1.4.** $\frac{1}{2} \ln \frac{14}{11}$. **1.5.** $\frac{a^2}{4}(\pi+4)$. **1.6.** $3\pi/2$. **1.7.** $y=x$, $y=x+3$, $x=1$, $x=2$. **1.8.** $y=x^2$, $y=2-x^2$, $x=\pm 1$. **1.9.** $x+y=2$, $x=\sqrt{4-y^2}$, $y=0$, $y=2$. **1.10.** $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2-x^2}$, $x=0$, $x=1$. **1.11.** $\int\limits_1^5 dx \int\limits_2^4 f(x, y)\, dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_1^5 f(x, y)\, dx$.

1.12. $\int\limits_2^4 dx \int\limits_2^x f(x, y)\, dy + \int\limits_4^5 dx \int\limits_2^4 f(x, y)\, dy + \int\limits_5^7 dx \int\limits_{x-3}^4 f(x, y)\, dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_y^{y+3} f(x, y)\, dx$. **1.13.** $\int\limits_{-a}^a dx \int\limits_{x^2/a}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f(x, y)\, dx = \int\limits_0^a dy \int\limits_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} \times f(x, y)\, dx + \int\limits_a^{a\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x, y)\, dx$. **1.14.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{ax}} f \times f(x, y)\, dy + \int\limits_a^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y)\, dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_{y^2/a}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx$.

1.15. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_a^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^{a/2} dy \times$

$\times \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{(a-\sqrt{a^2-4y^2})/2} f(x, y)\,dx + \int\limits_0^{a/2} dy \int\limits_{(a+\sqrt{a^2-4y^2})/2}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{a/2}^{a} \times$

$\times\, dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx$. **1.16.** Respecto a la variable x; la región de integración está limitada por las líneas $y = -\sqrt{x}$, $y = x^3$, $x = 1$, $x = 2$. **1.17.** $\int\limits_{-7}^{1} dy \int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x, y)\,dx$. **1.18.** $\int\limits_{-1}^{0} dx \times$

$\times \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x, y)\,dy$. **1.19.** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{2-\sqrt{4-y^2}} \times$

$\times f(x, y)\,dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{2+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y)\,dx$.

1.20. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{3\sqrt{x}} f(x, y)\,dy$. **1.21.** $\int\limits_0^{8/3} dy \int\limits_{2y-2}^{\sqrt{4+y^2}} f(x, y)\,dx$. **1.22.** $\int\limits_0^a \times$

$\times\, dy \int\limits_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\; x + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_0^{\sqrt{2ay-a^2}} f(x, y)\,dx$. **1.23.** $\int\limits_{-1}^{0} dx \times$

$\times \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x, y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y)\,dy$.

1.24. $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{9/y}^{10-y} f(x, y)\,dx$. **1.26.** $\frac{4}{3}\,a^4$. **1.27.** 112/9. **1.28.** 1/4. **1.29.** 1/3. **1.30.** 9/20. **1.31.** 68/15. **1.32.** $\pi^2/32$. **1.33.** $\frac{4}{3}\,a^3$. **1.34.** e. **1.35.** $\frac{1}{15}\,a^2b^2$. ● $\iint\limits_G x^2y\,dx\,dy = \int\limits_0^a x^2\,dx \int\limits_0^{f(x)} y\,dy = \int\limits_{\pi/2}^{0} a^2\cos^2 t\;(-a\times$

$\times \operatorname{sen} t)\, dt \int_0^{b \operatorname{sen} t} y\, dy$, donde la última integral se obtiene del anterior sustituyendo $x = a \cos t$. **1.36.** $3\pi^2 a^3$. **1.37.** $\frac{8}{105} a^3$. **1.38.** 1/4. ● Se llama valor medio de la función $f(x, y)$ en la región G el número $f_{\text{med}} = -\frac{1}{S} \iint_G f(x, y)\, dx\, dy$, donde S es el área de la región G. **1.39.** $1{,}63 < I < 2$. ● Según el teorema acerca de la estimación de la integral doble $mS < \iint_G f(x, y)\, dx\, dy < MS$ donde m es el valor mínimo de la función en la región G y M es el valor máximo, S es el área de la región G. **1.40.** 5/3. **1.41.** $\int_0^{\pi/6} \times$

$\times d\varphi \int_0^{a\sqrt{\operatorname{sen}\varphi}} f(r)\, r\, dr + \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(r)\, r\, dr$. **1.42.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \times$

$\times \int_{\frac{a\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}}^{2a\operatorname{sen}\varphi} f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)\, r\, dr$. **1.43.** $\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen} \times$

$\times \varphi)\, r\, dr + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}} f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)\, r\, dr + \int_{3\pi/4}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}} \times$

$\times f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)\, r\, dr$. **1.44.** $\int_0^{\pi/6} f(\operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi \int_0^{\sqrt{6}\cos\varphi} r\, dr + \int_{\pi/6}^{\pi/2} f \times$

$\times (\operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi \int_0^{3\sqrt{\cos 2\varphi}} r\, dr$. **1.45.** $\frac{\pi}{4}(e^{a^2} - 1)$. **1.46.** a. **1.47.** $\frac{128}{3}\pi$.

1.48. $\frac{\pi a}{2}$. **1.49.** $\frac{45}{64}\pi a^4$. **1.50.** $\frac{a}{2}(2 - \ln 2)$. **1.51.** $\frac{2\sqrt{2}}{15} a^4$. **1.52.**

$\frac{1}{a} \int_0^a dv \int_0^a f\left(\frac{u(a-v)}{a}, \frac{uv}{a}\right) u\, du$. **1.53.** $\frac{1}{3} \int_0^b du \int_p^q f \times$

$\times \left(\sqrt[3]{u^2 v}, \sqrt[3]{uv^2}\right) dv$. **1.54.** $\frac{1}{2} \int_1^3 du \int_{-u}^{6-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv$,

1.55. $\frac{1}{2}\int_p^q du \int_a^b f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)\frac{dv}{v}$. **1.56.** $2\pi ab\,(c-\sqrt{c^2-1})$.

1.57. $(e-1)/2$. **1.58.** $\frac{5}{48}(a^{-6/5}-b^{-6/5})(q^{6/5}-p^{6/5})$. **1.59.** $\frac{64}{3}a^2$.

1.60. $\frac{1}{2}(15-16\ln 2)$. **1.61.** $a^2(\pi-1)$. **1.62.** $\frac{1}{4}(b^2-a^2)(\pi+2)$.

● Pásese a las coordenadas polares. **1.63.** $\frac{1}{4}a^2(8-\pi)$. **1.64.** $(\pi-1)a^2$. ● Pásese a las coordenadas polares. **1.65.** $a^2/210$. ● Sustitúyanse las variables: $x=r\cos^2\varphi$, $y=r\,\mathrm{sen}^2\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. **1.66.** $\frac{\pi a^3 b}{2c^2}$. ● Pásese a las coordenadas polares generalizadas. **1.67.** $\frac{8}{15}(b^{5/4}-a^{5/4})(n^{3/4}-m^{3/4})$. ● Realícese el cambio de las variables: $y^2=ux$, $vy^2=x^3$. **1.68.** $\frac{(q^2-p^2)(b^3-a^3)}{6a^3b^3}$. ● Realícese el cabmio de las variables: $y^2=ux$, $y=vx$. **1.69.** $\frac{4}{\sqrt{3}}a^2$. **1.70.** $8\sqrt{2}\,a^2$. **1.71.** $2\sqrt{2}\,\pi p^2$. **1.72.** $\frac{76}{3}a^2$. **1.73.** $\frac{8}{3}\sqrt{2}\,a^2$. **1.74.** $16a^2$. **1.75.** $4\pi a^2(2-\sqrt{2})$. **1.76.** $\frac{\pi}{6}(27-5\sqrt{5})$. **1.77.** $2a^2(\pi-2)$. **1.78.** $\pi a^2(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$. **1.79.** $\pi/6$. **1.80.** $3\sqrt{2}\,\pi a^2$. **1.81.** $2a^2(\pi+4-4\sqrt{2})$. **1.82.** $\frac{16}{3}ab^2$. **1.83.** $\frac{4}{3}\times$ $\times a^3(2-\sqrt{2})$. ● Intégrese en el plano Oyz. **1.84.** 16/15. **1.85.** $a^3/2$. **1.86.** $\frac{2}{3}\pi a^3(3-\sqrt{2})$. **1.87.** $\pi abc\left(1-\frac{1}{e}\right)$. **1.88.** $\frac{2}{3}\pi a^3(2-\sqrt{2})$. **1.89.** $\frac{2}{3}\pi abc(2-\sqrt{2})$. **1.90.** $\frac{1}{2}\ln 3$. ● Realíceso el cambio de las variables $u=xy$, $y^2=vx$. **1.91.** 9/8. ● Realícese el cambio de las variables $u=xy$, $v=y/x$. **1.92.** $\frac{1}{2}\pi\delta R^2$. **1.93.** $M_x=\frac{4}{3}a^3$, $M_y=$ $=\frac{5}{8}\pi a^3$. **1.94.** $\bar{x}=\frac{2}{5}=a$, $\bar{y}=\frac{a}{2}$. **1.95.** $\frac{a^2b}{6}$. **1.96.** $M_x=\frac{\pi}{24}$, $M_y=1-\frac{\pi^2}{12}$. **1.97.** $\bar{x}=\frac{141a}{20(7-3\ln 2)}$, $\bar{y}=\frac{81a}{8(7-3\ln 2)}$. **1.98.** $I_x=$ $=1/12$, $I_y=7/12$. **1.99.** $\bar{x}=\bar{y}=\frac{128a}{105\pi}$. **1.100.** $I_x=\frac{21}{32}\pi a^4$, $I_y=$

$= \frac{49}{32}\pi a^4$, $I_0 = \frac{35}{16}\pi a^4$. **1.101.** $I_x = \frac{\pi a b^3}{4}$, $I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$, $I_0 =$ $= \frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$. **1.102.** a) $\frac{26}{105}a^4$; b) $\frac{61}{105}a^4$. ● $I_{x=-a} = \iint\limits_G (x+$ $+a)^2\,dx\,dy$. **1.103.** $I_x = \frac{ka^5}{5}$, $I_y = \frac{3}{20}ka^5$, $I_0 = \frac{7}{20}ka^5$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. **1.104.** $\pi a^4/8$. **1.105.** $I_x =$ $= \frac{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{16}a^4$, $I_y = \frac{2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{16}a^4$. **1.106.** $\frac{1}{2}\gamma(t^2-t_1)(R_2^4 -$ $- R_1^4)$. ● $Q = \gamma_0'(t_2-t_1)\iint\limits_G |xy|\,dx\,dy$. **1.107.** $\frac{4ah^2}{5}$. ● $E =$ $= \iint\limits_G (2x+y)\,dx\,dy$. **2.1.** $\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{\frac{12-2x}{3}} dy \int\limits_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} f(x, y, z)\,dz$. **2.2.** $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z)\,dz$. **2.3.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \times$ $\times\, dy \int\limits_{-\sqrt{(4x-y^2)/2}}^{\sqrt{(4x-y^2)/2}} f(x, y, z)\,dz$. **2.4.** 1/6. **2.5.** $a^4/8$. **2.6.** 81/4. **2.7.** 1/96. **2.8.** $a^4/10$. **2.9.** $2\pi a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$. ● Tómese por el eje Oz el eje del sector. **2.10.** $\frac{4}{3}\pi ah$. **2.11.** $\frac{8}{5}\pi R^{5/2}$. **2.12.** $\frac{3}{35}$. **2.13.** $\sqrt[3]{\frac{32V}{3\pi}}$. ● Pásese a las coordenadas cilíndricas. **2.14.** $a^3/45$. ● Pásese a las coordenadas esféricas. **2.15.** $\pi^2 abc/4$. ● Pásese a las coordenadas esféricas generalizadas según la fórmula: $x = ar\cos\varphi\cos\theta$, $y = br\times$ $\times \operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $z = cr\operatorname{sen}\theta$. Además $I = abcr^2\cos\theta$ $\left(r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant\right.$ $\left. \leqslant 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. **2.16.** $\frac{19}{6}\pi a^3$. ● Pásese a las coordenadas cilíndricas. **2.17.** $\pi a^3/3$. ● Pásese a las coordenadas esféricas. **2.18.** $M = \frac{3}{4}\pi\gamma_0 a^3$, $\gamma_{\text{med}} = \frac{9}{16}\gamma_0$. **2.19.** $M = \frac{1}{5}\pi\gamma_0 R^2 H$, $\gamma_{\text{med}} = \frac{3}{5}\gamma_0$. **2.20.** $M = \frac{1}{24}\pi\gamma_0 a^3$, $\gamma_{\text{med}} = \frac{1}{12}\pi\gamma_0$. **2.21.** $M = \frac{31}{5}\pi\gamma_0 a^3$, $\gamma_{\text{med}} =$ $= \frac{93}{140}\gamma_0$. **2.22.** $M = \frac{4}{3}\pi\gamma_0 R^2 H$, $\gamma_{\text{med}} = \frac{8}{3}\gamma_0$. **2.23.** $M = \pi^2\gamma_0 R^3$,

$\gamma_{med} = \frac{3}{4}\pi\gamma_0$. 2.24. $\left(0, \frac{4}{5}a, \frac{4}{15}h\right)$. 2.25. $\left(0, \frac{3}{7}b, \frac{2}{7}h\right)$. 2.26. $\left(0, 0, \frac{2}{3}H\right)$. 2.27. $\left(0, 0, \frac{3}{4}H\right)$. 2.28. $\left(0, 0, \frac{1}{3}R\right)$. 2.29. $\frac{8}{21}\gamma abh\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{3}\right)$. 2.30. $\frac{1}{6}\pi\gamma HR^4$. 2.31. $\frac{2}{3}\pi\gamma_0 R^5$.

2.32. $\frac{2\pi\gamma a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$. ◀ Se llama *potencial de Newton* del cuerdo T en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la integral $U = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\frac{dx\,dy\,dz}{r}$ donde $\gamma(x, y, z)$ es la densidad del cuerpo $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Tenemos $U = \gamma\iiint\limits_T \times$ $\times\frac{dx\,dy\,dz}{r} = \gamma\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Pasemos a las coordenadas cilíndricas: $U = \gamma\iiint\limits_T \frac{r\,dr\,d\varphi\,dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\gamma\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^b dz\int\limits_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}} \times$ $\times\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{2\pi\gamma a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$. ▶ 2.33. $\frac{2\pi\gamma kH}{\sqrt{H^2+R^2}}\times$ $\times\left(\sqrt{H^2+R^2}-H\right)$, donde k es la constante del principio de gravitación universal. ◀ Tomando el vértice del cono por el origen de coordenadas y su eje por el eje Oz, obtenemos la ecuación del cono en forma de $x^2+y^2 = \frac{R^2}{H^2}z^2$. A consecuencia de la simetría la fuerza resultante de gravitación será dirigida a lo largo del eje Oz y se expresará por la integral $F_z = k\gamma\iiint\limits_T \frac{z\,dx\,dy\,dz}{r^3} =$ $= k\gamma\iiint\limits_T \frac{z\,dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Pasemos a las coordenadas cilíndricas: $F_z = k\gamma\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^R r\,dr\int\limits_{\frac{H}{R}r}^H \frac{z\,dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\gamma kH}{\sqrt{H^2+R^2}}\left(\sqrt{H^2+R^2}-H\right)$.

▶ 2.34. $\frac{8}{15}\gamma ha^4$. 2.35. $\frac{1}{10}\gamma\pi HR^4$.

3.1. 1/4. 3.2. $\pi/2$. 3.3. 4π. 3.4. 1. 3.5. Diverge. 3.6. Converge para $\alpha > 1$. 3.7. 4. 3.8. $\frac{3}{2}\pi$. 3.9. $\pi/2$. 3.10. Converge para $\alpha < 1$.

● Sepárese la recta $y=x$ por una banda estrecha y póngase $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x-y)^\alpha} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{(x-y)^\alpha}$. **3.11.** Converge para $\alpha < 3/2$.

4.1. 15/4. **4.2.** 3/7. **4.3.** $f(x_0)$. **4.4.** $\frac{2}{y}\ln(1+y^2)$. **4.5.** $\frac{2y+1}{y^2+y}\operatorname{sen} y \times$ $\times(1+y) - \frac{2y-1}{y^2-y}\operatorname{sen} y\,(y-1)$. **4.6.** $[2ye^{-y^3} - e^{-y^2} - \int\limits_y^{y^2} x^2 e^{-yx^2}\,dx$.

4.7. $\int\limits_0^y (x(x-y)\cos xy - \operatorname{sen} xy)\,dx$. **4.8.** $x(2-3y^2) f(xy) +$ $+\frac{x}{y^2} f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 y(1-y^2) f'(xy)$. **4.10.** $E' = \frac{1}{k}(E-F)$, $F' = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{F}{k}$. ● Al calcular F' muéstrese que $\int\limits_0^{\pi/2} (1-k^2 \times$ $\times \operatorname{sen}^2\varphi)^{-3/2}\,d\varphi = \frac{1}{1-k^2}\int\limits_0^{\pi/2} (1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi$, para lo cual utilícese la siguiente identidad: $(1-k^2\operatorname{sen}^2)^{-3/2} = \frac{1}{1-k^2}(1-k^2 \times$ $\times \operatorname{sen}^2\varphi)^{1/2} - \frac{k}{1-k^2}\frac{d}{d\varphi}(\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{-1/2})$. **4.11.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{9}$. **4.12.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **4.14.** $F(y)$ converge no uniformemente en $[y_1, y_2]$, si esta integral converge para cualquier $y \in [y_1, y^2]$, pero existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $B > a$ existe $y = y(B) \in [y_1, y_2[$ para el cual $\left| \int\limits_B^{+\infty} f(x, y)\,dx \right| \geqslant \varepsilon$. **4.15.** Converge uniformemente.

4.16. Converge no uniformemente. **4.17.** Converge uniformemente. **4.18.** Converge uniformemente. **4.19.** Converge no uniformemente. **4.20.** Converge uniformemente. **4.21.** Converge no uniformemente.

4.22. Converge uniformemente. **4.24.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **4.25.** $\operatorname{arctg} \times$ $\times \frac{\beta}{m}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$. **4.26.** $\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$. **4.27.** $\ln(1+\alpha)$. **4.28.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \times$ $\times e^{-\frac{\delta^2}{4\gamma}}$. ● Diferénciense las integrales por el parámetro γ y resuélvase la ecuación $\frac{\partial F}{\partial \delta} = -\frac{\delta}{2\gamma}F$. **4.29.** $\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$. **4.30.** $\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$. **4.31.** $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$.

CAPÍTULO 9

ECUACIONES DIFERENCIALES

§ 1. Ecuaciones de primer orden

1. Conceptos fundamentales. La ecuación funcional

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

ó

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

que une entre sí la variable independiente, la función buscada $y(x)$ y su derivada $y'(x)$ se llama *ecuación diferencial de primer orden.*

Se llama *solución (solución particular)* de la ecuación (1) ó (2) en el intervalo (a, b) cualquier función $y = \varphi(x)$, la cual si se sustituye en esta ecuación junto con su derivada $\varphi'(x)$ la convierte en identidad respecto a $x \in (a, b)$. La ecuación $\Phi(x, y) = 0$ que determina esta solución como una función implícita recibe el nombre de *integral (integral particular)* de la ecuación diferencial. En el plano con un sistema de coordenadas rectangular cartesiano fijo la ecuación $\Phi(x, y) = 0$ determina cierta curva que se llama *curva integral* de la ecuación diferencial.

Se llama *solución general* de la ecuación diferencial (1) ó (2) la función $y = \varphi(x, C)$, que para cualquier valor del parámetro C es solución de esta ecuación diferencial. La ecuación $\Phi(x, y, C) = 0$ que determina la solución general como una función implícita se llama *integral general* de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 1. Verifíquese mediante la sustitución que la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es solución de la ecuación diferencial $xy' + y = \cos x$.

◀ Tenemos $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $y' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$. Multiplicando y e y' respectivamente por 1 y x, y sumando las expresiones obtenidas tenemos $xy + y' \equiv \cos x$. ▶

EJEMPLO 2. Muéstrese que la función $y = Cx^3$ es la solución general de la ecuación diferencial $xy' - 3y = 0$. Hállese la solución particular que satisface la condición $y(1) = 1$. (Hállese la curva integral que pasa por el punto $M_0(1, 1)$.)

◀ Al obtener $y' = 3Cx^2$ y sustituir las expresiones de y e y' en la ecuación diferencial, para cualquier valor de C obtenemos la identidad $3Cx^2 - 3Cx^3 \equiv 0$. Esto significa que la función $y = Cx^3$ es la solución general de la ecuación diferencial. Poniendo $x = 1$, $y = 1$, hallaremos el valor del parámetro $C = 1$ y de este modo obtendremos

la solución particular buscada $y = x^3$. Con otras palabras, la curva integral que pasa por el punto M_0 (1, 1) es la parábola cúbica $y = x^3$. ▶

Sea dada la ecuación

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

que determina en el plano una familia de curvas que dependen del valor del parámetro C. Si formamos el sistema de dos ecuaciones

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi'_x(x, y, C) = 0,$$

entonces eliminando de este sistema el parámetro C obtendremos, en general, la ecuación diferencial de la familia de curvas dada.

EJEMPLO 3. Hállese la ecuación diferencial de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$.

◀ Tenemos el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 2ax,$$

$$2x + 2yy' = 2a.$$

Eliminemos el parámetro a. A partir de la segunda ecuación hallamos $a = x + yy'$ y sustituyendo esta expresión en la primera ecuación obtenemos $x^2 + y^2 = 2x(x + yy')$, es decir, $y^2 - x^2 = 2xyy'$. Esta es la ecuación diferencial buscada. ▶

Muéstrese que las expresiones dadas determinan las soluciones generales o las integrales generales de las ecuaciones diferenciales correspondientes:

1.1. $y = x(C - \ln|x|)$, $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$.

1.2. $y = x\left(\int_0^x \frac{1}{x} e^x\,dx + C\right)$, $xy' - y = xe^x$.

1.3. $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$, $(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0$.

Determínese en la familia dada la ecuación de la curva que satisface la condición inicial citada

1.4. $y(\ln|x^2 - 1| + C) = 1$, $y(0) = 1$.

1.5. $y(1 - Cx) = 1$, $y(1) = 0{,}5$.

1.6. $y = 2 + C\cos x$, $y(0) = -1$.

1.7. Escríbase la ecuación a la cual satisfacen todos los puntos del extremo de las curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. ¿Cómo diferenciar los puntos del máximo de los puntos del mínimo?

1.8. Escríbase la ecuación a la cual satisfacen todos los puntos de inflexión de las curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, en particular de las ecuaciones diferenciales:

a) $y' = y + x^3$; b) $y' = e^y - x$.

Fórmense las ecuaciones diferenciales de las familias de curvas siguientes:

1.9. De las parábolas $y = x^2 + 2ax$.

1.10. De las hipérbolas $y = a/x$.

1.11. De las catenarias $y = a \operatorname{ch} x$.

1.12. De las hipérbolas $x^2 - y^2 = 2ax$.

1.13. Fórmese la ecuación diferencial de la familia de curvas para las cuales el segmento de toda normal comprendido entre los ejes de coordenadas, se divide por la mitad en el punto de tangencia.

1.14. Fórmese la ecuación diferencial de la familia de curvas para las cuales el segmento de cualquier tangente comprendido entre los ejes de coordenadas, se divide por el punto de tangencia $M(x, y)$ en razón $|AM| : |MB| = 2 : 1$, donde A es el punto de intersección de la tangente con el eje Oy; B, con el eje Ox.

1.15. Fórmese la ecuación diferencial de la familia de curvas para las cuales el área comprendida entre los ejes de coordenadas, de esta curva y ordenada variable, es proporcional a la cuarta potencia de esta ordenada.

2. Método gráfico de construcción de curvas integrales (método de isoclinas). La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ en el plano con el sistema de coordenadas rectangular cartesiano fijo Oxy determina el *campo de direcciones* por medio de la igualdad $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$.

Se llama *isoclina* de la ecuación (del campo de direcciones) cualquier curva determinada por la ecuación

$$f(x, y) = k$$

para un k fijo.

Para resolver aproximadamente (gráficamente) la ecuación $y' = f(x, y)$ construyamos en el plano las isoclinas para varios valores de k. Sea $M_0(x_0, y_0)$ un punto inicial. La isoclina L_0 que pasa por este punto corresponde al valor de k, igual a $k_0 = f(x_0, y_0)$. Tracemos el segmento M_0M_1 con el coeficiente angular k_0, hasta la intersección con la isoclina más próxima L_1 en el punto M_1 (de este modo sustituimos el arco de la curva integral por el segmento de su tangente). Luego, del punto $M_1(x_1, y_1)$ tracemos un nuevo segmento M_1M_2 con el coeficiente angular $k_1 = f(x_1, y_1)$, hasta la intersección con la isoclina siguiente L_2 en el punto M_2, etc.

Como resultado de tal construcción obtenemos una quebrada, que es la representación aproximada de la curva integral que pasa por el punto inicial M_0. Cuanto más densa se toma la rejilla de isoclinas, tanto más exacta resulta ser la curva integral.

Cambiando la posición del punto inicial M_0 se puede, de modo análogo, construir aproximadamente también otras curvas integrales.

EJEMPLO 4. Aplicando el método de isoclinas constrúyase la curva integral de la ecuación $y' = 2x$ que pasa por el origen de coordenadas.

◀ Las isoclinas de la ecuación dada son las rectas paralelas $2x = k$. Poniendo $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, obtenemos las isoclinas $x = 0$, $x = \pm 1/2$, $x = \pm 1$, $x = \pm 3/2$, etc. Construyámoslas (fig. 91).

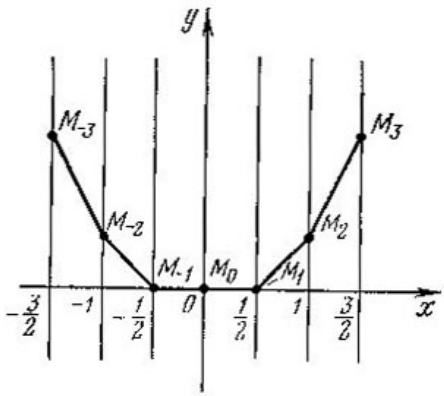


Fig. 91

Partiendo del origen de coordenadas a la izquierda y a la derecha construimos la quebrada $\ldots M_{-3}M_{-2}M_{-1}M_0M_1M_2M_3\ldots$ cuyos lados tienen coeficientes angulares $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, respectivamente. Esta quebrada es la representación aproximada de la curva integral.

Recomendamos al lector que construya la gráfica de la solución particular correspondiente $y = x^2$ y la compare con la quebrada construida. ▶

Aplicando el método de isoclinas constrúyase aproximadamente la familia de las curvas integrales de las ecuaciones diferenciales siguientes:

1.16. $y' = x + y$. **1.17.** $y' = 1 + y$.

1.18. $y' = -\frac{y}{x}$. **1.19.** $y' = y - x^2$.

1.20. $y' = \frac{y}{x+y}$. **1.21.** $y' = \frac{y-3x}{x+3y}$.

3. Ecuaciones con variables separables. Supongamos que en la ecuación

$$y' = f(x, y)$$

la función $f(x, y)$ se puede descomponer en factores $f_1(x)$ y $f_2(y)$, cada uno de los cuales depende sólo de una variable, o bien en la ecuación

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

los coeficientes de dx y dy se representan en forma de $M(x, y) = M_1(x)\,M_2(y)$, $N(x, y) = N_1(x)\,N_2(y)$. Al dividir por $f_2(y)$ y por $N_1(x)\,M_2(y)$, respectivamente, estas ecuaciones se reducen a la forma respectiva

$$f_1(x)\,dx = \frac{1}{f_2(y)}\,dy,$$

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy.$$

Integrando los primeros miembros de estas ecuaciones respecto a x y los segundos respecto a y, obtenemos en cada una de éstas la integral general de la ecuación diferencial inicial.

EJEMPLO 5. Resuélvase la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+1}.$$

◀ Separemos las variables

$$(3y^2+1)\,dy=2x\,dx.$$

Integramos

$$\int (3y^2+1)\,dy=\int 2x\,dx+C$$

o bien

$$y^3+y-x^2=C$$

(integral general de la ecuación).

Si en la ecuación con variables separables $y'=f_1(x)\,f_2(y)$ la función $f_2(y)$ tiene una raíz real y_0, es decir, si $f_2(y_0)=0$, entonces la función $y(x)=y_0$ es la solución de la ecuación (es fácil cerciorarse de esto mediante la sustitución directa). Al dividir ambos miembros de esta ecuación por $f_2(y)$ (al separar las variables) la solución $y(x)=y_0$ puede perderse.

De modo análogo, al integrar la ecuación $M_1(x)\,M_2(y)\,dx+N_1(x)\,N_2(y)\,dy=0$ pueden perderse las curvas integrales $x(y)=x_0$ e $y(x)=y_0$, donde x_0 es la raíz real de la función $N_1(x)$, y_0 es la raíz de la función $M_2(y)$.

Por eso, al obtener la integral general de la ecuación aplicando el método de separación de las variables indicado más arriba, es necesario verificar si forman parte de ella (para los valores numéricos adecuados del parámetro C) las soluciones particulares mencionadas. Si forman parte, no hay pérdida de solución. Si no forman parte, entonces es necesario incluirlas como componentes de la integral.

EJEMPLO 6. Resuélvase la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=y\operatorname{tg}x.$$

◀ Separamos las variables

$$\frac{dy}{y}=\operatorname{tg}x\,dx.$$

Integramos

$$\ln|y|=-\ln|\cos x|+C_1$$

o bien

$$\ln|y\cos x|=C_1.$$

Para que sea más cómodo potenciar la igualdad obtenida representemos el parámetro C_1 en forma logarítmica, poniendo $C_1=\ln|C_2|$, $C_2\neq 0$ (en este caso C_1 toma todos los valores desde $-\infty$ hasta $+\infty$). Entonces

$$\ln|y\cos x|=\ln|C_2|$$

y potenciando obtenemos la integral general en forma de $y\cos x=C_2$, de donde

$$y=C_2\sec x. \qquad (3)$$

Señalemos ahora que la ecuación diferencial inicial tiene, evidentemente, además la solución $y = 0$ que no figura en la notación (3), pues $C_2 \neq 0$. Introduzcamos un nuevo parámetro C, que a diferencia de C_2 toma también el valor nulo. Entonces la solución $y = 0$ formará parte de la solución general

$$y = C \sec x. \blacktriangleright$$

Aplicando la sustitución $u(x) = ax + by(x) + d$, también se reducen a las ecuaciones con variables separables, las ecuaciones diferenciales de tipo

$$y' = f(ax + by + d), \quad b \neq 0.$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.22. $y' \sqrt{1 - x^2} = 1 + y^2$. **1.23.** $y' = e^{x+y}$.

1.24. $y' + \dfrac{x \operatorname{sen} x}{y \cos y} = 0$.

1.25. $(1 + y^2)\, x\, dx + (1 + x^2)\, dy = 0$.

1.26. $xy\, dx + \sqrt{1 - x^2}\, dy = 0$.

1.27. $ye^{2x}\, dx - (1 + e^{2x})\, dy = 0$.

1.28. $2e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 + e^x) \sec^2 y\, dy = 0$.

1.29. $(1 + y)(e^x\, dx - e^{2y}\, dy) - (1 + y^2)\, dy = 0$.

1.30. $y' = \cos(x + y)$. **1.31.** $y' = \dfrac{1}{2x + y}$.

1.32. $y' = (4x + y + 1)^2$.

Hállense las soluciones parciales de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales indicadas:

1.33. $(1 + y^2)\, dx - xy\, dy = 0$; $y(1) = 0$.

1.34. $(xy^2 + x)\, dy + (x^2y - y)\, dx = 0$; $y(1) = 1$.

1.35. $y' \operatorname{tg} x = y$; $y(\pi/2) = 1$.

4. Euaciones homogéneas. La ecuación diferencial de primer orden se llama *homogénea* si se puede reducir a la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

o a la forma

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{5}$$

donde $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son *funciones homogéneas* del mismo orden, es decir existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $M(tx, ty) = t^k M(x, y)$ y $N(tx, ty) = t^k N(x, y)$ son idénticos respecto a x, y y $t \neq 0$.

Con ayuda de la sustitución $y/x = u(x)$ las ecuaciones homogéneas (4) y (5) se transforman en ecuaciones con variables separables.

EJEMPLO 7. Resuélvase la ecuación

$$y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}.$$

◀ Pongamos $\frac{y}{x}=u$, o bien $y=ux$. Entonces $y'=u+x\frac{du}{dx}$, lo que da, después de la sustitución en la ecuación inicial, la ecuación con variables separables

$$x\frac{du}{dx}=\cos u.$$

Separemos las variables

$$\frac{du}{\cos u}=\frac{dx}{x}$$

e integremos

$$\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=Cx.$$

Obtenemos la solución general

$$u=2\operatorname{arctg} Cx-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Volviendo a la función y, hallamos

$$y=x\left(2\operatorname{arctg} Cx-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Al dividir entre cos$u$ fueron perdidas las soluciones $y=x\left(\frac{\pi}{2}+\right.$ $\left.+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. Añadiéndolas a la familia de soluciones obtenida encontramos la integral general en forma de

$$y=x\left(2\operatorname{arctg} Cx+\frac{\pi}{2}+\pi\,(2n-1)\right),$$

$$y=x\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right);\ n,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Las ecuaciones diferenciales del tipo

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right),\qquad (6)$$

cuando $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}$ se reducen a las ecuaciones homogéneas con ayuda del cambio de variables

$$x=u+m,\quad y=v+n$$

donde m y n se obtienen del sistema de ecuaciones

$$a_1m+b_1n+c_1=0,$$
$$a_2m+b_1n+c_2=0.$$

Ya que aquí $dx = du$, $dy = dv$, la ecuación (6) se transforma en la ecuación del tipo (4) respecto a la función $v(u)$:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1m + b_1n + c_1}{a_2u + b_2v + a_2m + b_2n + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) =$$

$$= f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{v}{u}}{a_1 + b_2\frac{v}{u}}\right) = \varphi\left(\frac{v}{u}\right).$$

Si en la ecuación (6) $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda$ y por consiguiente, $a_2x + b_2y = \lambda(a_1x + b_1y)$, entonces ella toma la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_2y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = \varphi(a_1x + b_1y).$$

Sustituyendo $u(x) = a_1x + b_1y(x)$ esta ecuación se reduce a la ecuación con variables separables.

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.36. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$. **1.37.** $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{sen}\frac{y}{x}$.

1.38. $y' = (x - y)/(x + y)$.

1.39. $(x^2 + xy)\,y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

1.40. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$.

1.41. $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0$.

1.42. $(y + 2)\,dx - (2x + y - 4)\,dy = 0$.

1.43. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas:

1.44. $xy' = y \ln\frac{y}{x}$; $y(1) = 1$.

1.45. $(\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0$; $y(1) = 1$.

1.46. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx - x\,dy = 0$; $y(1) = 0$.

5. Ecuaciones lineales. La ecuación diferencial de primer orden se llama *lineal* si contiene y e y' de primer grado, es decir, tiene la forma

$$y' = P(x)\,y + Q(x). \tag{7}$$

Para $Q(x) \equiv 0$ la ecuación (7) toma la forma de

$$y' = P(x)\,y$$

y se llama *lineal homogénea*. Es la ecuación con variables separables y su solución general tiene la forma

$$y = Ce^{\int P(x)\,dx} \tag{8}$$

donde C es una constante arbitraria y $\int P(x)\,dx$ es una de las primitivas de la función $P(x)$.

Se puede integrar la ecuación *lineal no homogénea* (7) aplicando uno de los siguientes métodos.

a) MÉTODO DE VARIACIÓN DE LA CONSTANTE. Buscaremos la solución de la ecuación (7) en forma de

$$y = C(x)\, e^{\int P(x)dx} \tag{9}$$

que se obtiene de (8) si cambiamos la constante C por la función $C(x)$. Sustituyendo la expresión (9) en la ecuación (7) tenemos, para la función buscada $C(x)$, la ecuación con variables separables

$$C'(x) = Q(x)\, e^{-\int P(x)dx}.$$

Su solución general es

$$C(x) = \int Q(x)\, e^{-\int P(x)dx}\, dx + C,$$

donde C es una constante arbitraria y $\int Q(x)\, e^{-\int P(x)dx}\, dx$ es una de las primitivas. Sustituyendo la expresión obtenida para $C(x)$ en la fórmula (9) obtenemos la solución general (7):

$$y = e^{\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)\, e^{-\int P(x)dx}\, dx\right). \tag{10}$$

b) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN. Pongamos $y(x) = u(x)\, v(x)$. Entonces la ecuación (7) se reduce a la forma

$$v\left(\frac{du}{dx} - P(x)\, u\right) + \left(\frac{dv}{dx}\, u - Q(x)\right) = 0, \tag{11}$$

Escojamos la función $u(x)$ de tal modo que el primer paréntesis en el primer miembro de la ecuación (11) se anule. Para esto integramos la ecuación con variables separables

$$\frac{du}{dx} - P(x)\, u = 0$$

y escogemos cualquier solución particular suya $u = u_1(x)$. Sustituyendo la función $u_1(x)$ en vez de u en el primer miembro de la ecuación (11), obtenemos la ecuación con variables separables respecto a la función $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx}\, u_1(x) - Q(x) = 0.$$

Hallemos la solución general de esta ecuación:

$$v = v(x, C).$$

Multiplicando las funciones halladas $u_1(x)$ y $v(x, C)$, obtenemos la solución general de la ecuación (7):

$$y = u_1(x)\, v(x, C).$$

EJEMPLO 8. Resuélvase mediante el método de variación de la constante la ecuación

$$y' = y \operatorname{ctg} x + \operatorname{sen} x.$$

◀ Analicemos primero la ecuación lineal homogénea correspondiente

$$y' = y \operatorname{ctg} x.$$

Su solución general es $y = C \operatorname{sen} x$. Por consiguiente, buscamos la solución general de la ecuación inicial en forma de $y = C(x) \operatorname{sen} x$. Sustituyendo y e $y' = C'(x) \operatorname{sen} x + C(x) \cos x$ en la ecuación dada:

$$C'(x) \operatorname{sen} x + C(x) \cos x = \operatorname{ctg} x \cdot C(x) \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x,$$

de donde $C'(x) = 1$, y entonces $C(x) = x + C$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación es

$$y = (x + C) \operatorname{sen} x. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 9. Resuélvase mediante el método de sustitución la ecuación, lineal respecto a x y $\frac{dx}{dy}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x}{y} + \frac{3}{y^2}.$$

◀ Pongamos $x = uv$ y reduzcamos la ecuación a la forma de

$$v\left(\frac{du}{dy} - \frac{2u}{y}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\, u - \frac{3}{y^2}\right) = 0. \qquad (12)$$

Hallemos la función $u_1(y)$ resolviendo la ecuación

$$\frac{du}{dy} - \frac{2u}{y} = 0$$

y escogiendo de su solución general $u = y^2 + C$ una solución particular, por ejemplo, $u_1(y) = y^2$. Sustituyendo $u_1(y)$ en la ecuación (12) tenemos:

$$\frac{dv}{dy}\, y^2 - \frac{3}{y^2} = 0, \quad \text{ó} \quad \frac{dv}{dy} = \frac{3}{y^4}.$$

La solución general de esta ecuación:

$$v(y, C) = C - \frac{1}{y^3}.$$

Multiplicando entre sí $u_1(y)$ y $v(y, C)$, obtenemos la solución general de la ecuación dada:

$$x = Cy^2 - \frac{1}{y}. \blacktriangleright$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.47. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

1.48. $(1 + x^2)\, y' - 2xy + (1 + x^2)^2$.

1.49. $y' + 2y = e^{3x}$. **1.50.** $y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1$.

1.51. $y' = \frac{2y}{x+1} + e^x (x+1)^2$. **1.52*.** $y' = \frac{y}{x + y^3}$.

1.53. $(1 + y^2)\, dx = (\operatorname{arctg} y - x)\, dy$.

1.54*. $y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y}$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas:

1.55. $y' + y \operatorname{tg} x = 1/\cos x$; $y(0) = 0$.

1.56. $y' = 2y + e^x - x$; $y(0) = 1/4$.

1.57. $y' = y/(2y \ln y + y - x)$; $y(1) = 1$.

6. Ecuación de Bernoulli. Se llama *ecuación de Bernoulli* la ecuación diferencial de primer orden del tipo

$$y' = P(x)\, y + Q(x)\, y^m, \tag{13}$$

donde $m \neq 0$, $m \neq 1$ (si $m = 0$ la ecuación (13) es lineal y si $m = 1$, es la ecuación con variables separables).

Al igual que la ecuación lineal, la ecuación de Bernoulli puede ser integrada sustituyendo $y = uv$ o reducida a la ecuación lineal aplicando la sustitución $z = y^{1-m}$. Hay que tener en cuenta que si $m > 1$ puede perderse la solución $y = 0$.

EJEMPLO 10. Resuélvase la ecuación

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y}.$$

◀ Suponiendo $y = uv$ reducimos la ecuación a la forma

$$v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\, u - \frac{x^2}{uv}\right) = 0. \tag{14}$$

De la solución general $u = Cx$ de la ecuación

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$$

escogemos en calidad de la función u una solución particular, por ejemplo,

$$u_1 = x.$$

Sustituyendo u_1 en la ecuación (14) obtenemos una nueva ecuación $\frac{dv}{dx}\, x - \frac{x^2}{xv} = 0$, ó $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$. Su solución general es $v = \sqrt{2x + C}$.

Multiplicando entre sí u_1 y v, tenemos la solución general de la ecuación inicial $y = x\sqrt{2x + C}$. ▶

EJEMPLO 11. Resuélvase la ecuación de Bernoulli respecto a $x = x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y} - \frac{1}{2x}.$$

◀ Pongamos $x = uv$ y reduzcamos la ecuación a la forma:

$$v\left(\frac{du}{dy} - \frac{u}{2y}\right) + \left(\frac{dv}{dy}u + \frac{1}{2uv}\right) = 0.$$

Después de analizar la ecuación

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{2y} = 0,$$

tomemos su solución particular $u_1 = \sqrt{y}$. Entonces llegamos a la ecuación

$$\frac{dv}{dy}\sqrt{y} + \frac{1}{2v\sqrt{y}} = 0$$

cuya solución general es

$$v^2 = \ln\frac{C}{y}.$$

Multiplicando entre sí $u_1^2 = y$ y v^2 obtendremos la integral general de la ecuación inicial

$$x^2 = y \ln\frac{C}{y}. \blacktriangleright$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.58. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

1.59. $y' = y \operatorname{ctg} x + \dfrac{y^2}{\operatorname{sen} x}$.

1.60.* $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + \operatorname{sen} 2y}$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales:

1.61. $3dy = (1 - 3y^3)\, y \operatorname{sen} x\, dx; \quad y(\pi/2) = 1.$

1.62. $y\,dx + \left(x - \dfrac{1}{2}x^3y\right)dy = 0; \quad y(1/2) = 1.$

7. Ecuaciones diferenciales exactas. La ecuación diferencial de primer orden del tipo

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (15)$$

se llama *ecuación diferencial exacta* (o en diferenciales totales), si su primer miembro es una diferencial total de cierta función $U(x, y)$,

es decir,

$$P(x, y)=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q(x, y)=\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Para que la ecuación (15) sea una ecuación diferencial exacta, es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{16}$$

Si la ecuación (15) es una ecuación diferencial exacta, entonces se puede escribirla en forma

$$dU(x, y)=0.$$

La integral completa de esta ecuación es:

$$U(x, y)=C,$$

donde C es una constante arbitraria.

La función $U(x, y)$ puede ser hallada del modo siguiente. Integrando la igualdad $\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y)$ respecto a x para un y fijo y señalando que la constante arbitraria puede depender en este caso de y, tenemos

$$U(x, y)=\int P(x, y)\,dx+\varphi(y). \tag{17}$$

Luego, de la igualdad

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx+\varphi'(y)=Q(x, y)$$

hallamos la función $\varphi(y)$ y sustituyéndola en (17) obtenemos la función $U(x, y)$.

Es evidente que la función buscada $U(x, y)$ está definida con exactitud de hasta la constante aditiva arbitraria. Para escribir la integral general de la ecuación inicial es suficiente escoger una de las funciones de la familia que obtenemos.

OBSERVACIÓN. Un método más simple de determinación de la función $U(x, y)$ consiste en el cálculo de la así llamada integral curvilínea de segunda especie

$$U(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy,$$

donde los puntos $M_0(x_0, y_0)$ y $M(x, y)$ y el camino de integración están situados en la región de la continuidad de las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ y de sus derivadas parciales, además $M_0(x_0, y_0)$ es cierto punto fijo.

EJEMPLO 12. Resuélvase la ecuación

$$\frac{y}{x}\,dx+(y^3+\ln x)\,dy=0,$$

cerciorándose previamente de que ésta es la ecuación diferencial exacta.

◀ Verifiquemos la condición (16):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}\ ;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(y^3+\ln x)=\frac{1}{x}\ .$$

La condición (16) está cumplida, por consiguiente la ecuación dada es la ecuación diferencial exacta.

Hallemos la función $U(x, y)$. Integrando respecto de x, si y es constante, la igualdad

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y)=\frac{y}{x}$$

obtenemos

$$U(x, y)=\int \frac{y}{x}\,dx+\varphi(y)=y\ln x+\varphi(y). \tag{18}$$

Señalemos que al calcular la primitiva escribimos aquí $\ln x$ en vez de $\ln|x|$, pues la ecuación inicial contiene $\ln x$ y, por consiguiente, tiene sentido sólo para $x>0$.

Sustituyendo (18) en la igualdad

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x, y)=y^3+\ln x$$

tenemos

$$\ln x+\varphi'(y)=y^3+\ln x,$$

de donde

$$\varphi(y)=\frac{1}{4}y^4+C_1. \tag{19}$$

Poniendo, por ejemplo, $C_1=0$ hallamos partiendo de (18) y (19)

$$U(x, y)=y\ln x+\frac{1}{4}y^4.$$

Por consiguiente, la integral general de la ecuación dada tiene la forma

$$y\ln x+\frac{1}{4}y^4=C.\ ▶$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales indicadas más abajo después de cerciorarse que son ecuaciones diferenciales exactas:

1.63. $(2x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0.$

1.64. $(10xy-8y+1)\,dx+(5x^2-8x+3)\,dy=0.$

1.65. $(2x+e^{x/y})\,dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{x/y}\,dy=0.$

1.66. $2x\cos^2 y\,dx+(2y-x^2\operatorname{sen}2y)\,dy=0.$

8. Teorema de existencia y unicidad de la solución. Soluciones singulares. Se llama *problema de Cauchy* para la ecuación diferencial $y'=f(x, y)$, el problema acerca de la determinación de la solución

particular de esta ecuación que satisface la condición inicial dada $y(x_0) = y_0$.

TEOREMA DE CAUCHY. *Si en la ecuación diferencial* $y' = f(x, y)$ *la función* $f(x, y)$ *es continua en cierta región* D *del plano* Oxy *y tiene en esta región la derivada parcial acotada* $f'_y(x, y)$, *entonces para cualquier punto* $(x_0, y_0) \in D$ *en cierto intervalo* $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$ *existe una solución* y *además única* $y(x)$ *de esta ecuación, que satisface la condición inicial* $y(x_0) = y_0$.

Geométricamente esto significa, que por cada punto M de la región D pasa una y sólo una curva integral de la ecuación $y' = f(x, y)$.

Los puntos de la región D en los cuales se altera la unicidad de la solución del problema de Cauchy se llaman *puntos singulares* de la ecuación diferencial.

La solución (curva integral) de la ecuación $y' = f(x, y)$, en cada punto de la cual se altera la unicidad de la solución del problema de Cauchy, se llama *solución singular* (*curva integral singular*) de esta ecuación. No se puede obtener la solución singular a partir de la general para ninguno de los valores de C (incluyendo también $C = \pm\infty$).

La envolvente de una familia de curvas determinadas por la solución general $y = \varphi(x, C)$ o por la integral general $\Phi(x, y, C) = 0$, es una curva integral singular. Se determina eliminando, si es posible, el parámetro C del sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C), \\ 0 = \varphi'_C(x, C) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0. \end{cases}$$

La función determinada de este modo es conveniente sustituirla en la ecuación diferencial dada y es necesario cerciorarse que es su solución.

EJEMPLO 13. Hállese la región en la cual la ecuación

$$y' = x\sqrt{1 - y^2}$$

tiene una única solución.

◀ Aquí $f(x, y) = x\sqrt{1 - y^2}$ es una función continua para $|y| \leqslant 1$; la derivada parcial $f'_y(x, y) = -\dfrac{xy}{\sqrt{1 - y^2}}$ está acotada para $|y| \leqslant a < 1$. Por consiguiente, la ecuación dada tiene una única solución en cualquier franja $-a \leqslant y \leqslant a$ (para $0 < a < 1$). ▶

EJEMPLO 14. Hállense las soluciones singulares de la ecuación

$$y' = \sqrt{1 - y^2},$$

conociendo su solución general $y = \operatorname{sen}(x + C)$, $|x + C| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Compongamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen}(x + C), \\ 0 = \cos(x + C), \end{cases} \quad |x + C| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Eliminando C encontramos dos funciones $y = \pm 1$, que evidentemente son soluciones de la ecuación dada y no se obtienen a partir de la solución general para ninguno de los valores de C. Por consiguiente,

$y = \pm 1$ son soluciones singulares.

Hállense las regiones de existencia y unicidad de la solución para las ecuaciones diferenciales:

1.67. $y' = x^2 - y^2$. **1.68.** $y' = \dfrac{y}{y-x}$.

1.69. $y' = 1 + \operatorname{tg} y$. **1.70.** $y' = x^2 + \sqrt{x - y^2}$.

Hállense las soluciones singulares de las siguientes ecuaciones diferenciales, conociendo las soluciones generales (donde están indicadas).

1.71. $y' = \dfrac{2\sqrt{y}}{x}$.

1.72. $y' = 4x\sqrt{y-1}$; $y = (x^2 + C)^2 + 1$.

1.73. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$; $(y - C)^2 = 4Cx$.

1.74. $y = y'^2 - xy' + \dfrac{x^2}{2}$; $y = \dfrac{x^2}{2} + Cx + C^2$.

9. Ecuaciones no resueltas respecto a la derivada. Sea la ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$ resoluble, bien respecto a la función buscada, es decir, tiene la forma

$$y = f(x, y'), \tag{20}$$

o bien respecto al argumento, es decir, se escribe en la forma

$$x = f(y, y'). \tag{21}$$

Entonces la ecuación se integra introduciendo el parámetro $p = y'$. Las ecuaciones (20) y (21) se transforman en ecuaciones algebraicas y si las diferenciamos respecto a x o a y, obtenemos los sistemas de ecuaciones

$$y = f(x, p) \qquad x = f(y, p),$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} \text{ ó } \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Partiendo de estos sistemas hallamos respectivamente la solución general de la ecuación (20) ó (21) en la forma explícita o paramétrica.

EJEMPLO 15. Resuélvase la ecuación

$$y = y'^2 + xy' - x.$$

◀ Introduzcamos el parámetro $p = y'$. Entonces

$$y = p^2 + x(p - 1). \tag{22}$$

Diferenciando esta igualdad respecto a x obtendremos

$$p = 2p\frac{dp}{dx} + p - 1 + x\frac{dp}{dx},$$

o bien

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{2p+x}.$$

Escribamos la última igualdad en la forma

$$\frac{dx}{dp}=x+2p.$$

Esta es la ecuación lineal; su solución general es:

$$x = Ce^p - 2(p+1). \tag{23}$$

Al sustituir la expresión (23) en la fórmula (22) obtendremos

$$y = Ce^p(p-1) - p^2 + 2. \tag{24}$$

El sistema de relaciones (23) y (24) determina la solución general de la ecuación inicial en forma paramétrica:

$$x = Ce^p - 2(p+1), \quad y = Ce^p(p-1) - p^2 + 2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 16. Resuélvase la ecuación

$$x = y'^2 + \frac{y}{y'}.$$

◀ Suponiendo $p = y'$ tenemos

$$x = p^2 + \frac{y}{p}.$$

Diferenciamos esta igualdad respecto a y:

$$\frac{1}{p} = 2p\frac{dp}{dy} + \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}$$

ó bien

$$\frac{dp}{dy}\left(2p - \frac{y}{p^2}\right) = 0.$$

De aquí

$$p_1 = C \quad \text{y} \quad p_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\,y}.$$

Sustituyendo uno tras otro ambos resultados en la expresión para x encontramos la solución general

$$y = Cx - C^3$$

y la solución

$$y = \frac{2}{3\sqrt{3}}\,x^{3/2},$$

la cual, como es fácil cerciorarse, es singular. ▶

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.75. $y = y'^2 + 4y'^3$. **1.76.** $y = y'\sqrt{1+y'^2}$.

1.77. $y = (y' - 1)\, e^{y'}$. **1.78.** $y = \frac{y'^2}{2} + 2xy' + x^2$.

1.79. $x = y'^3 - y' + 2$. **1.80.** $x = y' \cos y'$.

1.81. $x = 2y' - \ln y'$. **1.82.** $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

Un caso particular de la ecuación del tipo (20) es la así llamada *ecuación de Lagrange*

$$y = xf(y') + \varphi(y') \tag{25}$$

la cual para $f(y') = y'$ se llama *ecuación de Clairaut*. Introduciendo el parámetro $p = y'$ la ecuación (25) se reduce a la forma

$$y = xf(p) + \varphi(p)$$

en el caso de la ecuación general de Lagrange y a la forma

$$y = xp + \varphi(p)$$

en el caso de la ecuación de Clairaut.

Las soluciones singulares de la ecuación de Lagrange tienen la forma

$$y = xf(p_0) + \varphi(p_0),$$

donde p_0 es cualquiera de las raíces de la ecuación $f(p) = p$.

La solución general de la ecuación Clairaut tiene la forma

$$y = Cx + \varphi(C) \tag{26}$$

y la solución singular,

$$x = -\varphi'(p), \quad y = -\varphi'(p)\, p + \varphi(p) \tag{27}$$

que es la envolvente de una familia de curvas integrales (26).

De este modo se puede enunciar la siguiente *regla práctica*. Sustituyendo en la ecuación Clairaut el símbolo y' por el símbolo C obtendremos inmediatamente la solución general (26). Diferenciándola respecto a C y eliminando C del sistema de dos ecuaciones (de la solución general y del resultado de la diferenciación) obtenemos la solución singular (27).

EJEMPLO 17. Resuélvase la ecuación de Lagrange

$$y = xy'^2 + y'.$$

◀ Poniendo $y' = p$ hallamos

$$y = xp^2 + p.$$

Diferenciando esta igualdad respecto a x tenemos

$$p = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}$$

ó

$$\frac{dx}{dp} = x\frac{2p}{p - p^2} + \frac{1}{p - p^2}.$$

Esta ecuación lineal tiene la solución general

$$x=\frac{1}{(1-p)^2}(C+\ln|p|-p),$$

sustituyendo la cual en la fórmula para y obtenemos la solución general de la ecuación inicial en la forma paramétrica:

$$x=\frac{C+\ln|p|-p}{(1-p)^2}, \qquad y=\frac{(C+\ln|p|-p)p^2}{(1-p)^2}+p.$$

Además, la ecuación tiene las soluciones singulares $y=0$ e $y=x+1$ que corresponden a las raíces $p_1=0$ y $p_2=1$ de la ecuación $p^2=p$. ▶

EJEMPLO 18. Resuélvase la ecuación

$$y=xy'-y'^4.$$

◀ La ecuación dada tiene la forma (25) para $f(y')=y'$, es decir, es la ecuación de Clairaut. Siguiendo la regla práctica obtenemos la solución general

$$y=Cx-C^4.$$

Eliminando luego el parámetro C del sistema de ecuaciones

$$y=Cx-C^4,$$
$$0=x-4C^3$$

obtendremos la solución singular

$$y=\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}x^{4/3}. \blacktriangleright$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.83. $y=x\dfrac{1+y'^2}{2y'}$. **1.84.** $y=2xy'+\dfrac{1}{y'^2}$.

1.85. $y=xy'^2+y'^3$. **1.86.** $y=\dfrac{1}{2}(xy'+y'\ln y')$.

1.87. $y=xy'-\dfrac{1}{y'}$. **1.88.** $y=xy'+|y'|\sqrt{y'}$.

1.89. $y=xy'-e^{y'}$. **1.90.** $y=xy'+\cos y'$.

10. Problemas mixtos de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Defínanse los tipos de las ecuaciones diferenciales e indíquense de modo general los métodos de su resolución:

1.91. $\operatorname{sen} x^3=e^{\frac{y'-x^2}{y}}$. **1.92.** $\sqrt{x^2-y^2}=\dfrac{2x^2}{y-3x-xy'}$.

1.93. $1+x+(1+x^2)(e^x-e^{2y}y')=0$.

1.94. $2y'(1-x^2)-xy-2xy^2+2x^3y^2=0$.

1.95. $y\,dx + (2x - y^2)\,dy = 0.$

1.96. $\left(\frac{x}{y} - x + y^2\right)dx + \left(2xy + y - \frac{x^2}{2y^2}\right)dy = 0$

1.97. $y\,dx + (x - 2\sqrt{xy})\,dy = 0.$

1.98. $(x^2 + y^2 + 1)\,dy + xy\,dx = 0.$

1.99. $y' = \operatorname{sen}(y - x).$ **1.100.** $x = \arccos\frac{y' - a^x}{y}.$

1.101. $\sqrt{y} = \frac{y' - ye^{x^2 \operatorname{sen} x}}{x^2 + 2x - 1}.$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.102. $y' + xy = x^3.$ **1.103.** $(x - y)\,dy - y\,dx = 0.$

1.104. $(x \cos 2y + 1)\,dx - x^2 \operatorname{sen} 2y\,dy = 0.$

1.105. $y' = y \operatorname{tg} x - y^2 \cos x.$

1.106. $y' = \frac{1 - 2x}{y^2}.$

1.107. $2y\,dx + (y^2 - 6x)\,dy = 0.$

1.108. $(xye^{x/y} + y^2)\,dx = x^2 e^{x/y}\,dy.$

1.109. $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2 y)\,dy = 0.$

1.110. $(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2 y)\,dy = 0.$

1.111. $xy' + y = y^2 \ln x.$

1.112. $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0.$

1.113. $y' = \frac{x + y}{x - y}.$ **1.114.** $y' \cos x - y \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x.$

1.115. $(2x + \ln y)\,dx + \left(\frac{x}{y} + \operatorname{sen} y\right)dy = 0.$

1.116. $y = xy' - \ln y'.$ **1.117.** $y' = \frac{1}{xy + x^2 y^3}.$

1.118. $\left(x - y \operatorname{sen}\frac{x}{y}\right)dx + x \operatorname{sen}\frac{y}{x}\,dy = 0.$

1.119*. $(1 - y^2)\,dx = (\sqrt{1 + y^2}\cos y - xy)\,dy.$

1.120. $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = 0.$

1.121. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\operatorname{sen}^2 x}.$ **1.122.** $y = y'^2 + 2xy' + \frac{x^2}{2}.$

1.123*. $(x - 2y^3)\,dx + 3y^2(2x - y^3)\,dy = 0.$

11. Problemas geométricos y físicos que llevan a la resolución de las ecuaciones diferenciales de primer orden. En los problemas de geometría, en los cuales se exige hallar la ecuación de la curva basándose en la propiedad dada de su tangente, normal o área del trapecio curvilíneo, se emplea la interpretación geométrica de la derivada (pendiente de la tangente) y de la integral con límite variable (área del trapecio curvilíneo con ordenada limitadora móvil), así como las fórmulas generales siguientes para determinar las longitudes de los segmentos de la tangente t, de la normal n, de la subtangente s_t y de la subnormal s_n (fig. 92):

$$t=\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|,\quad n=|y|\sqrt{1+y'^2}|,$$

$$s_t=\left|\frac{y}{y'}\right|,\qquad s_n=|yy'|.$$

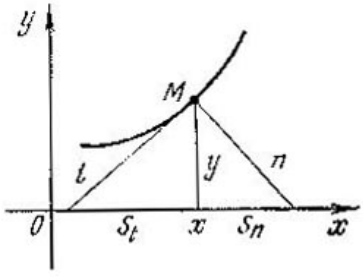


Fig. 92

EJEMPLO 19. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el origen de coordenadas, si en cada su punto $M(x, y)$ la subtangente s_t es k veces menor que la subnormal s_n.

◀ Sea $y = f(x)$ la ecuación de la curva buscada. Utilizando las expresiones para la subtangente s_t y la subnormal s_n obtenemos inmediatamente la ecuación diferencial

$$|yy'|=k\left|\frac{y}{y'}\right|$$

ó

$$(y')^2=k.$$

Integrando esta ecuación y tomando en consideración la condición inicial $y(0) = 0$, obtenemos la ecuación buscada

$$y=\pm\sqrt{k}\cdot x$$

(dos rectas). ▶

EJEMPLO 20. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 1), si para cualquier segmento $[1, x]$ el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco correspondiente de esta curva, es dos veces mayor que el producto de coordenadas del punto $M(x, y)$ de la curva $(x > 0,\ y > 0)$.

◀ Según la condición del problema tenemos

$$\int_1^x y(t)\,dt=2xy(x).$$

Diferenciando esta ecuación respecto a x tenemos la ecuación diferencial $y = 2(y + xy')$ o

$$y'=-\frac{y}{2x}.$$

Integrando esta ecuación y tomando en consideración la condición inicial $y(1) = 1$, hallamos la ecuación de la curva buscada:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}. \blacktriangleright$$

1.124. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(\sqrt{2}, 0)$, si la suma de las longitudes de su tangente y subtangente es igual al producto de corrdenadas del punto de tangencia.

1.125. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 2), si su subtangente es dos veces mayor que la abscisa del punto de tangencia.

1.126. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1/2, -1)$, si la longitud del segmento del semieje de las abscisas, que se corta por su tangente, es igual al cuadrado de la abscisa del punto de tangencia.

1.127. Hállense las ecuaciones de las curvas para las cuales la longitud del segmento de la normal es constante e igual a a.

1.128. Hállense las ecuaciones de las curvas cuya subnormal tiene una longitud constante igual a a.

1.129. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (0, 2), si el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco de esta curva, es dos veces mayor que la longitud del arco correspondiente.

1.130. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1, 1/2)$, si para cualquier segmento $[1, x]$ el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco correspondiente, es igual a la razón entre la abscisa x del punto extremo y la ordenada.

1.131. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (0, 3), si la subtangente en todo punto es igual a la suma de la abscisa del punto de tangencia y de la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto de tangencia $\left(\text{limítese a analizar el caso de } \frac{y}{y'} > 0\right)$.

1.132. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 0) si la longitud del segmento del eje de abscisas que se corta por su normal es en 2 mayor que la abscisa del punto de tangencia.

1.133. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el origen de coordenadas, si para cualquier segmento $[a, x]$ el

área del trapecio curvilíneo limitado por el arco correspondiente de esta curva, es igual al cubo de la ordenada del punto extremo del arco.

1.134. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto con coordenadas polares $r = 2$, $\varphi = 0$, si el ángulo α entre su tangente y el radio vector del punto de tangencia es una magnitud constante: $\operatorname{tg} \alpha = a$.

1.135. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 1), si a la longitud del segmento del eje de abscisas que se corta por cualquier tangente a ella, es igual a la longitud de esta tangente.

1.136. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (3, 1), si la longitud del segmento que se corta por cualquier tangente suya sobre el eje de ordenadas, es igual a su subnormal.

1.137. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el origen de coordenadas, si el punto medio del segmento de su normal desde un punto cualquiera de la curva hasta el eje Ox, está situado en la parábola $2y^2 = x$.

1.138. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 0), si el área del trapecio formado por la tangente, los ejes de coordenadas y la ordenada del punto de tangencia es constante e igual a 3/2.

1.139. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (0, 1), si el área del triángulo formado por el eje de abscisas, la tangente y el radio vector del punto de tangencia es constante e igual a 1.

1.140. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 2), si el producto de la abscisa del punto de tangencia por la abscisa del punto de intersección de la normal con el eje Ox, es igual al cuadrado duplicado de la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto de tangencia.

1.141. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto con coordenadas polares $r = \pi$, $\varphi = \pi/2$, si el área del sector limitado por esta curva, el eje polar y el radio polar variable, es seis veces menor que el cubo del radio polar.

Llamamos *trayectorias ortogonales* para la familia uniparamétrica S_1 de líneas $y = \Phi(x, a)$, a otra familia S_2 de líneas que intersecan las líneas de la primera familia bajo el ángulo recto.

EJEMPLO 21. Hállense las trayectorias ortogonales de la familia de las parábolas cúbicas $y = ax^3$.

◀ Hallamos la ecuación diferencial de la familia dada, eliminando a del sistema de ecuaciones

$$y = ax^3,$$
$$y' = 3ax^2.$$

Obtendremos

$$y' = \frac{3y}{x}.$$

La ecuación diferencial de la familia de las trayectorias ortogonales es

$$y' = -\frac{x}{3y}.$$

Su integral general

$$x^2 + 3y^2 = C^2$$

es la ecuación de la familia de las trayectorias ortogonales (elipses).▶

Hállense las trayectorias ortogonales de las familias dadas de las curvas (a es un parámetro):

1.142. $ay^2 = x^3$. **1.143.** $y = ax^2$.

1.144. $x^2 - 2y^2 = a^2$. **1.145.** $y = ae^{2x}$.

Al formar las ecuaciones diferenciales de primer orden en los problemas físicos a menudo se utiliza el *método de las diferenciales*, según el cual las relaciones aproximadas entre los incrementos pequeños de las magnitudes, se sustituyen por las relaciones entre sus diferenciales. Esta sustitución no se refleja en los resultados, pues todo se reduce a la eliminación de los infinitésimos de órdenes superiores. El otro método para formar las ecuaciones diferenciales consiste en la utilización del sentido físico de la derivada como velocidad de la duración del proceso.

EJEMPLO 22. En un recipiente inicialmente se contiene A kg de sustancia disuelto en B litros de agua. Luego, cada minuto en el recipiente entran M litros de agua y salen N litros de disolución ($M \geqslant N$), además la concentración se conserva homogénea mediante la agitación. Hállese la cantidad de sustancia en el recipiente dentro de T minutos, después del comienzo del proceso.

◀ Designemos por $x(t)$ la cantidad de sustancia en el recipiente dentro de t minutos después del comienzo del proceso y por $(x + \Delta x)$ en el tiempo $(t + \Delta t)$. Señalemos que $\Delta x < 0$ para $\Delta t > 0$ (es decir, la disolución «se debilita»).

Sea $V(t)$ el volumen de la mezcla en el momento t:

$$V(t) = B + Mt - Nt.$$

La concentración de la sustancia en el momento t es igual, evidentemente, a x/V. En un lapso de tiempo infinitamente pequeño $[t, t + \Delta t]$ la cantidad de sustancia se cambia en una magnitud infi-

nitesimal Δx para la cual es válida la igualdad aproximada

$$\Delta x \approx -\frac{x}{V} N \Delta t = -\frac{Nx}{B+(M-N)t} \Delta t.$$

Sustituyendo los incrementos Δx y Δt por las diferenciales dx y dt obtenemos la ecuación diferencial:

$$dx = -\frac{Nx}{B+(M-N)t} dt.$$

Integrando esta ecuación con variables separables y considerando $M > N$ hallamos la solución general:

$$x(t) = \frac{C}{(B+(M-N)t)^{\frac{N}{M-N}}}.$$

Utilizando la condición inicial $x = A$ para $t = 0$ hallamos la solución particular

$$x(t) = A\left(\frac{B}{B+(M-N)t}\right)^{\frac{N}{M-N}}.$$

Poniendo $t = T$, obtendremos la respuesta:

$$x(T) = A\left(\frac{B}{B+(M-N)T}\right)^{\frac{N}{M-N}}.$$

El caso de $M = N$ exige un análisis particular (véase el problema 1.154). ▶

1.146. La velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas del cuerpo y el medio ambiente que lo rodea (ley de Newton). Hállese la temperatura T en función del tiempo t, si el cuerpo calentado hasta T_0 grados está introducido en un local donde la temperatura es constante e igual a a grados.

1.147. ¿Al cabo de cuánto tiempo la temperatura de un cuerpo calentado hasta 100 °C descenderá hasta 25 °C, si la temperatura en el local es igual a 20 °C y durante los primeros 10 minutos el cuerpo se enfrió hasta 60 °C?

1.148. La acción retardadora del rozamiento sobre un disco que gira dentro de un líquido es proporcional a la velocidad angular de rotación. Hállese esta velocidad angular en función del tiempo, conociendo, que el disco, que comenzó a girar con una velocidad de 5 r.p.s., al cabo de dos minutos gira con una velocidad de 3 r.p.s. ¿Dentro de qué tiempo tendrá una velocidad angular de 1 r.p.s.?

1.149. La velocidad de desintegración del radio es proporcional a la cantidad disponible del mismo. Durante un año se desintegra 0,44 mg de cada gramo de radio. ¿Cuántos años tardará en desintegrarse la mitad de la cantidad disponible de radio?

1.150*. La velocidad con que sale el agua de un recipiente a través de un orificio pequeño se determina por la fórmula $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, donde h es la altura del nivel de agua por encima del orificio, g es la aceleración de la caída libre (póngase $g = 10$ m/s^2). ¿Al cabo de cuánto tiempo saldrá toda el agua del depósito cilíndrico que tiene un diámetro $2R = 1$ y una altura $H = 1{,}5$ m, a través de un orificio en el fondo de $2r = 0{,}05$ m de diámetro?

1.151*. La cantidad de luz absorbida al pasar a través de una capa delgada de agua, es proporcional a la cantidad de luz que cae sobre ella y al espesor de la capa. Sabiendo, que al atravesar una capa de agua de 2 m de espesor se absorbe 1/3 del flujo luminoso inicial, hállese qué parte de esta luz alcanzará la profundidad de 12 m.

1.152. Una barca disminuye su movimiento a consecuencia de la resistencia del agua que es proporcional a la velocidad de la barca. La velocidad inicial de ésta es de 1,5m/s, al cabo de 4 segundos se reduce a 1 m/s. ¿Qué tiempo se necesita para que la velocidad disminuya hasta 1 cm/s? ¿Qué trayecto recorrerá la barca hasta parar?

1.153*. Una bala a la velocidad $v_0 = 400$ m/s atraviesa una pared cuyo espesor es $h = 20$ cm y sale a la velocidad de 100 m/s. Suponiendo que la fuerza de resistencia de la pared es proporcional al cuadrado de la velocidad de movimiento de la bala, hállese el tiempo que tardó la bala en atravesar la pared.

1.154. En un depósito se encuentran 100 l de solución que contiene 10 kg de sal. En el depósito entra el agua a una velocidad de 5 l/min y la mezcla sale de él con la misma velocidad. La concentración se supone homogénea. ¿Qué cantidad de sal se quedará en el depósito al cabo de una hora?

1.155. Cierta sustancia se transforma en otra con una velocidad proporcional a la cantidad de sustancia no transformada. Si al cabo de una hora quedan 31,4 g de la primera sustancia y al transcurrir otras tres horas, 9,7 g hállese: a) ¿Cuánta sustancia había al inicio del proceso? b) ¿Cuánto

tiempo, después del comienzo del proceso, transcurrirá hasta quedar sólo el 1% de la cantidad inicial?

1.156*. En el local de un taller de 10 800 m^3 de capacidad el aire contiene 0,12% de dióxido de carbono. Los ventiladores suministran aire fresco con un contenido de 0,04% de dióxido de carbono, en cantidad de 1500 m^3/min. Suponiendo que la concentración de dióxido de carbono en todos los lugares del taller y en cada momento de tiempo, es la misma, hállese el contenido de dióxido de carbono a los 10 min después que el ventilador inició su trabajo.

1.157. La intensidad de la corriente i en un circuito con resistencia R, autoinducción L y tensión u satisface la ecuación

$$L\frac{di}{dt}+Ri=u.$$

Hállese la intensidad de la corriente i en el momento t si $u = E$ sen ωt e $i = 0$, para $t = 0$, (L, R, E, ω son constantes).

§ 2. Ecuaciones diferenciales de órdenes superiores

1. Nociones fundamentales. Teorema de Cauchy. La ecuación diferencial de n-ésimo orden tiene la forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

o bien

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Se llama *solución general* de la ecuación (1) ó (2) una función tal $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, que para cualesquiera valores de los parámetros $C_1, \ldots, C_n$ es la solución de esta ecuación diferencial.

La ecuación

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0 \tag{3}$$

que determina la *solución general* como una función implícita, se llama *integral general* de la ecuación diferencial.

Se llama *problema de Cauchy* para la ecuación diferencial (2) el problema de determinación de la solución $y(x)$, que satisface las condiciones iniciales dadas

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{4}$$

Si es conocida la solución general $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ de la ecuación (2), entonces para resolver el problema de Cauchy las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se determinan a partir del sistema de ecuaciones (si

es resoluble)

$$y_0 = \varphi(x_0, C_1, \ldots, C_n),$$
$$y_0' = \varphi'(x_0, C_1, \ldots, C_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1 \ldots, C_n).$$

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE CAUCHY. *Si la ecuación diferencial* (2) *es tal, que la función* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *en cierta región* D *de variación de sus argumentos es continua y tiene derivadas parciales continuas* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, *entonces para todo punto* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ *existe tal intervalo* $x_0 - h < x < x_0 + h$, *sobre el cual existe la solución de esta ecuación y además única, que satisface las condiciones iniciales* (4).

EJEMPLO 1. Muéstrese que la función $y = C_1 e^{C_2 x}$ es la solución general de la ecuación diferencial $yy'' = y'^2$.

◀ Tenemos: $y' = C_1 C_2 e^{C_2 x}$, $y'' = C_1 C_2^2 e^{C_2 x}$.

Sustituyendo las expresiones y, y' e y'' en la ecuación dada, obtendremos la identidad

$$C_1 e^{C_2 x} \cdot C_1 C_2^2 e^{C_2 x} = (C_1 C_2 e^{C_2 x})^2.$$

Por consiguiente, la función $y = C_1 e^{C_2 x}$ es la solución general de la ecuación dada. ▶

EJEMPLO 2. Hállese el campo de existencia y la unicidad de solución de la ecuación

$$y'' = \frac{y\sqrt{y'}}{x}.$$

◀ La función $f(x, y, y') = \frac{y\sqrt{y'}}{x}$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{y'}}{x}$ [es continua para $x \neq 0$, $y' \geqslant 0$; la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y}{2x\sqrt{y'}}$ es continua para $x \neq 0$, $y' > 0$.

Por consiguiente la ecuación dada tiene la única solución para $x \neq 0$, $y' > 0$. ▶

Hállese el campo de existencia y la unicidad de solución de las ecuaciones:

2.1. $y'' = x + \sqrt{x^2 - y'}$. **2.2.** $y'' = y' \ln y'$.

Muéstrese que las funciones dadas son soluciones generales de las ecuaciones diferenciales correspondientes:

2.3. $y = \ln \frac{1}{x + C_1} + C_2$; $y'' = y'^2$.

2.4. $y = x^2 \ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$; $xy''' = 2$.

Muéstrese que las relaciones dadas son las integrales generales de las ecuaciones diferenciales correspondientes:

2.5. $e^y \operatorname{sen}^2 (C_1 x + C_2) = 2C_1^2$; $y'' = e^y$.

2.6. $C_1 y = \operatorname{sen} (C_1 x + C_2)$; $yy'' + 1 = y'^2$.

Muéstrese que las funciones dadas son las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales correspondientes:

2.7. $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$; $1 + y'^2 = 2yy''$.

2.8. $y = e^x$; $y^2 + y'^2 = 2yy''$.

Eliminando los parámetros dedúzcanse las ecuaciones diferenciales para las familias de las líneas siguientes:

2.9. Rectas sobre el plano no paralelas al eje Oy.

2.10. Circunferencias de radio constante R.

2.11. Sinusoides $y = A \operatorname{sen} (x + \alpha)$ donde A y α son parámetros.

2.12. Parábolas con el eje paralelo al eje Oy.

2. Ecuaciones que permiten la reducción del orden. Más abajo se dan algunos tipos de ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden que permiten la reducción del orden.

a) ECUACIONES DEL TIPO $y^{(n)} = f(x)$. La solución general se obtiene integrando n veces $y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)\,dx + P_{n-1}(x)$, donde $P_{n-1}(x) = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n$ o según la fórmula

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt + P_{n-1}(x).$$

EJEMPLO 3. Hállense la solución general de la ecuación $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$ y su solución particular, que satisface las condiciones iniciales $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

◀ Integrando por primera vez tenemos $y' = \operatorname{tg} x + C_1$. La integración reiterada nos da $y = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2$. Esta es la solución general. Sustituyendo ahora en la solución general obtenida y en la expresión para la primera derivada $x = \frac{\pi}{2}$, y respectivamente $y = \frac{\ln 2}{2}$ y $y' = 1$, obtenemos el sistema de dos ecuaciones con las in-

cógnitas C_1 y C_2. Resolviendo este sistema determinamos los valores de los parámetros $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$ que corresponden a la solución particular buscada que, por consiguiente, tiene la forma $y = -\ln|\cos x|$. ▶

b) Ecuaciones del tipo $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, es decir, ecuaciones que no contienen implícitamente la función buscada y sus derivadas hasta el orden $k-1$ inclusive. Sustituyendo $y^{(k)} = p(x)$ el orden de la ecuación se reduce en k unidades: $F(x, p, p', \ldots, \ldots, p^{(n-k)}) = 0$. Supongamos que para la ecuación obtenida podemos hallar la solución general $p(x) = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$. Entonces la función buscada $y(x)$ se obtiene integrando k veces la función $\varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$.

Ejemplo 4. Hállese la solución particular de la ecuación $x^4y''' + 2x^3y'' = 1$ que satisface las condiciones iniciales $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = \frac{1}{2}$, $y''(1) = -1$.

◀ La ecuación dada no contiene y e y'. Pongamos $y'' = p$, entonces $y''' = \frac{dp}{dx}$ y la ecuación toma la forma $x^4\frac{dp}{dx} + 2x^3p = 1$, ó $\frac{dp}{dx} + \frac{2}{x}p = \frac{1}{x^4}$. Esta es la ecuación de primer orden. Su solución general es $p = -\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2}$. Utilizando la condición inicial $y''(1) = p(1) = -1$ obtenemos $C_1 = 0$. Por consiguiente, $y'' = -\frac{1}{x^3}$, de donde $y' = \frac{1}{2x^2} + C_2$. La condición inicial $y'(1) = 1/2$ permite determinar $C_2 = 0$. Integrando otra vez obtenemos $y = -\frac{1}{2x} + C_3$ y de la condición $y(1) = 1/2$ se deduce que $C_3 = 1$. Así pues, la solución particular buscada es $y = 1 - \frac{1}{2x}$ (hipérbola equilátera). ▶

c) Ecuaciones del tipo $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ que no contienen implícitamente variable independiente. Sustituyendo $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, $y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$, etc. el orden de la ecuación se reduce en una unidad.

Ejemplo 5. Hállese la integral general de la ecuación $y'y''' - 3y''^2 = 0$.

◀ Pongamos $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, $y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$. Entonces la ecuación se transforma en

$$p\left(p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}\right) - 3p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0.$$

Reduciendo los términos semejantes y simplificando en p^2 (en este caso es conveniente tomar en consideración la solución que se pierde $p = 0$ ó $y = c$), tenemos

$$p\frac{d^2p}{dy^2} - 2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0.$$

Poniendo aquí $\frac{dp}{dy} = z$, $\frac{d^2p}{dy^2} = z\frac{dz}{dp}$, llegamos a la ecuación

$$pz\frac{dz}{dp} - 2z^2 = 0.$$

Simplificando en z (en este caso es conveniente tomar en consideración una solución más $z = \frac{dp}{dy} = 0$, es decir, $p = C_1$ e $y = C_1x + C_2$) obtendremos $\frac{dz}{z} - \frac{2\,dp}{p} = 0$, de donde $\ln|z| - \ln p^2 = \ln|C_1|$, ó $z = \frac{dp}{dy} = C_1p^2$. Integrando la última ecuación hallamos que

$$-\frac{1}{p} = C_1y + C_2, \text{ ó } -\frac{dx}{dy} = C_1y + C_2.$$

Definitivamente obtendremos $x = \overline{C}_1y^2 + \overline{C}_2y + C_3$, donde $\overline{C}_1 = -\frac{C_1}{2}$, $\overline{C}_2 = -C_2$, es decir, la familia de parábolas. Señalemos que en la solución general figuran las soluciones particulares que fueron perdidas con anterioridad.

d) Ecuaciones del tipo $\frac{d}{dx}G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$, es decir, tales ecuaciones en las cuales el primer miembro puede ser representado como derivada total con respecto a x de cierta función $G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Integrando por x obtendremos una nueva ecuación cuyo orden es en una unidad inferior al orden de la ecuación inicial.

Ejemplo 6. Hállese la solución general de la ecuación

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3.$$

◀ El primer miembro de la ecuación es una derivada total respecto a x de la función $(1+x^2)y'$ y el segundo, de la función $\frac{x^4}{4}$, es decir, podemos reescribir la ecuación así: $((1+x^2)y')' = \left(\frac{x^4}{4}\right)'$. De aquí, integrando obtenemos $(1 + x^2)y' = \frac{x^4}{4} + \frac{C_1}{4}$, o

$$dy = \frac{x^4 + C_1}{4(1+x^2)}\,dx.$$

Por consiguiente,

$$y=\int \frac{x^4+C_1}{4(1+x^2)}\,dx=\int\left(\frac{1}{4}(x^2-1)+\frac{C_1+1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

y definitivamente

$$y=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x+\overline{C}_1\operatorname{arctg}x+C_2$$

donde $\overline{C}_1=\dfrac{C_1+1}{4}$. Esta es la solución general. ▶

e) LA ECUACIÓN $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$, ES HOMOGÉNEA RESPECTO A LA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS, es decir, $F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)})=t^kF(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, $t\neq 0$. Sustituyendo $y'=yz$, $y''=y(z^2+z')$, ... el orden de la ecuación se reduce en una unidad.

EJEMPLO 7. Hállese la solución general de la ecuación $xyy''-xy'^2+yy'=0$.

◀ Pongamos $y'=yz$, $y''=y(z^2+z')$. Entonces la ecuación toma la forma

$$xy^2(z^2+z')-xy^2z^2+y^2z=0.$$

Simplificando en y^2 (en este caso se obtiene la solución $y=0$) obtenemos $xz'+z=0$, o $\dfrac{dz}{z}+\dfrac{dx}{x}=0$, de donde $z=C_1x$. Ya que $z=\dfrac{y'}{y}$, entonces llegamos a la ecuación $y'=C_1xy$, o $\dfrac{dy}{y}=C_1x\,dx$, de donde $\ln y=\dfrac{C_1x^2}{2}+\ln|C_2|$ o $y=C_2e^{\overline{C}_1x^2}$, donde $\overline{C}_1=C_1/2$. Esta es la solución general que contiene precisamente la solución particular perdida $y=0$. ▶

En algunos casos es difícil hallar la solución en la forma de función explícita e implícita, sin embargo se consigue recibir la solución en forma paramétrica.

EJEMPLO 8. Hállese la solución general de la ecuación $y''(1+2\times\ln y')=1$.

◀ Pongamos $y'=p$, $y''=\dfrac{dp}{dx}$. Entonces la ecuación toma la forma $\dfrac{dp}{dx}(1+2\ln p)=1$ o $dx=(1+2\ln p)\,dp$ de donde $x=-p+2p\ln p+C_1$. Ya que $dy=p\,dx$, entonces hallamos, $dy=p(1+2\ln p)\,dp$ de donde $y=p^2\ln p+C_2$ y obtenemos la solución general en forma paramétrica:

$$x=p(-1+2\ln p)+C_1,\quad y=p^2\ln p+C_2.$$ ▶

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales aplicando métodos de reducción del orden:

2.13. $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$.

2.14. $y''=x+\operatorname{sen}x$.

2.15. $y'' + 2xy'^2 = 0$. 2.16. $xy'' - y' - x \operatorname{sen} \frac{y'}{x} = 0$.

2.17. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$. 2.18. $x^3y'' + x^2y' - 1 = 0$.

2.19. $(1 - x^2)\, y'' + xy' - 2 = 0$. 2.20. $(1 + e^x)\, y'' + y' = 0$.

2.21. $y''' = 2\,(y'' - 1) \operatorname{ctg} x$. 2.22. $x^2y''' = y''^2$.

2.23. $y''' = y''^2$. 2.24. $(2y + y')\, y'' = y'^2$.

2.25. $y'' = 1/\sqrt{y}$. 2.26. $y^3y'' + 1 = 0$.

2.27. $yy'' + y - y'^2 = 0$. 2.28. $yy'' - 2yy' \ln y - y'^2 = 0$.

2.29. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$. 2.30. $(y - 1)y'' = 2y'^2$.

2.31. $xy''' + y'' - x - 1 = 0$. 2.32. $yy'' + y'^2 = x$.

2.33. $y'' = \frac{y - xy'}{x^2}$. 2.34. $\frac{y''^2 - y'y'''}{y'^2} = \frac{1}{x^2}$.

2.35*. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

2.36. $xy'\,(yy'' - y'^2) - yy'^2 = x^4y^3$.

2.37. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$. 2.38. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales que satisfacen las condiciones iniciales dadas:

2.39. $y'' = xe^x$, $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = 0$.

2.40. $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$, $y\,(1) = 0$, $y'\,(1) = 1$, $y''\,(1) = 2$.

2.41. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y\,(2) = 0$, $y'\,(2) = 4$.

2.42. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$, $y\,(0) = y'\,(0) = 1$.

2.43. $y'' = e^{2y}$, $y\,(0) = 0$, $y'\,(0) = 1$.

2.44. $y'' \cos y + y'^2 \operatorname{sen} y - y' = 0$, $y\,(-1) = \pi/6$, $y'\,(-1) = 2$.

2.45. $y''/y' = 2yy'/(1 + y^2)$, $y\,(0) = 0$, $y'\,(0) = 1$.

2.46. $yy'' - y'^2 = y^2$, $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = 0$.

2.47. $yy'' = 2xy'^2$, $y\,(2) = 2$, $y'\,(2) = 0.5$.

2.48. $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0$, $y\,(0) = y'\,(0) = 1$.

2.49. Hállese la curva integral de la ecuación $yy'y'' = y'^3 + y''^2$ que es tangente en el origen de coordenadas a la recta $x + y = 0$.

2.50. Hállese la curva integral de la ecuación $yy'' + y'^2 - 1 = 0$ que pasa por el punto $M_0 = (0, 1)$ y que es tangente en este punto a la recta $x + y = 1$.

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales en la forma paramétrica:

2.51. $(x + 2y')\,y'' = 1$. 2.52. $y''^2 - 2y'y'' + 3 = 0$.

2.53. $(2 + y')e^{y'}\,y'' = 1$. 2.54. $(3y - 2y')y'' - y'^2 = 0$.

2.55. Hállense la ecuación de la curva que es tangente al eje de abscisas en el origen de coordenadas, si su curvatura en todo punto es igual a $\cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

2.56. Hállense las ecuaciones de las curvas, cuyo radio de curvatura en cualquier punto es igual a la longitud del segmento de la normal, que está comprendido entre este punto y el eje de abscisas, si la curva es

a) cóncava hacia las y positivas, b) cóncava hacia las y negativas.

2.57*. Hállense las ecuaciones de las curvas cuyo radio de curvatura en cualquier punto es dos veces mayor que la longitud del segmento de la normal comprendido entre este punto y el eje de abscisas si es conocido que la curva es:

a) cóncava hacia las y positivas, b) cóncava hacia las y negativas.

2.58. Determínese la forma de un hilo no extensible, homogéneo, flexible, con extremos fijos, que se encuentra en el estado de equilibrio bajo la acción del propio peso, si el peso de una unidad de longitud del hilo es igual a q (la proyección horizontal de la fuerza de tensión del hilo es $H = \text{const}$). Colóquese el hilo de tal modo que el vértice de la curva coincida con el punto $(a, 0)$, donde $a = H/q$.

2.59. Un hilo no extensible, homogéneo, pesado, flexible, en estado de equilibrio se somete a una tensión, proporcional al área variable de su sección transversal. Determínese la forma del hilo, suponiendo que es plano, si el peso de una unidad de volumen del hilo se igual a q (la proyección horizontal de la fuerza de tensión del hilo es $H = \text{const}$). Colóquese el hilo de tal modo que la curva pase por el origen de coordenadas y tenga en este punto la tangente horizontal.

2.60. Un cuerpo de masa m se mueve rectilíneamente bajo la acción de una fuerza constante P. Hállense la velocidad de movimiento del cuerpo y el trayecto recorrido por el como funciones del tiempo, si en el momento inicial ambos son

iguales a cero y la resistencia del ambiente es proporcional al cuadrado de velocidad.

2.61*. Una pelota de 400 g de masa cae desde una altura de 16,7 m sin velocidad inicial. La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad de la pelota e igual a 0,0048 H, a la velocidad de 1 m/s. Calcúlense el tiempo de caída y la velocidad de la pelota en el final de la caída. Tómese $g = 10$ m/s^2.

2.62. Un cuerpo de masa m se eleva verticalmente con una velocidad inicial v_0. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo (con un coeficiente de proporcionalidad igual a k^2), hállense la altura a la que se eleva el cuerpo y la velocidad con que vuelve a su situación inicial, así como el tiempo de subida y caída del cuerpo.

2.63*. Una pelota de 400 g de masa fue lanzada hacia arriba con una velocidad de 20 m/s. Calcúlense el tiempo que la pelota tardó en elevarse y la altura máxima de subida, si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad de la pelota (con un coeficiente de proporcionalidad igual a k^2) y además es igual a 0,0048 H, a la velocidad de 1 m/s. Tómese $g = 10$ m/s^2.

2.64. Determínese la ley del movimiento rectilíneo de un punto material de masa m bajo la acción de la fuerza de repulsión, que es inversamente proporcional al cubo de la distancia del punto al centro inmóvil. En el momento inicial el punto está en reposo y se encuentra del centro a la distancia x_0.

2.65. Un punto material de masa m se mueve rectilíneamente en dirección al centro inmóvil que lo atrae con una fuerza inversamente proporcional al cubo de la distancia desde el centro (el coeficiente de proporcionalidad es igual a mk^2). Determínese la ley de movimiento, si empieza cuando el punto se encuentra en estado de reposo y está del centro a una distancia de x_0. Determínese el tiempo al cabo del cual el punto alcanza el centro.

2.66. Un cohete se mueve verticalmente hacia arriba bajo la acción de la fuerza de repulsión debida a la salida de los gases. La masa del cohete varía en función del tiempo según la ley $m = m_0 \varphi(t)$, donde $m_0 = \text{const}$ (principio de la combustión del combustible). La velocidad relativa de la salida de los gases es constante e igual a u_0. La velocidad inicial del cohete cerca de la superficie de la Tierra es nula. Hállese la altura a que se eleva el cohete como función del tiempo,

si la resistencia del aire se desprecia. Analícese el caso particular cuando $m = m_0 (1 - \alpha t)$ y calcúlese para este caso a que altura se eleva el cohete pasando 10 s, 30 s y 50 s, cuando $u_0 = 2000$ m/s y $\alpha = 0{,}01$ s^{-1}. Tómese $g = 9{,}8$ m/s^2.

2.67. Determínese cuánto tiempo tarda en caer sobre la Tierra un cuerpo atraído por la Tierra según la ley de Newton (con una aceleración inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos), si en el momento inicial la velocidad del cuerpo es nula y la distancia entre él y el centro de la Tierra es igual a H. Despréciese la resistencia de la atmósfera. La aceleración de la caída libre sobre la superficie de la Tierra es constante e igual a g.

2.68*. Un cuerpo que se encuentra a la distancia $x_1 = 60{,}27\ R_t$ del centro de la Tierra (lo que corresponde a la distancia entre la Tierra y la Luna), cae sobre la Tierra del estado de reposo bajo la acción de la fuerza de la gravedad, con una aceleración inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la Tierra. Despreciando la resistencia de la atmósfera determínese, cuánto tiempo tardará en caer sobre la Tierra. Tómese $R_t = 6{,}377 \cdot 10^6$ m, $g = 9{,}8$ m/s^2.

2.69. Determínese la velocidad a la que el meteoro choca contra la Tierra, si cae desde una altura infinitamente grande a partir del estado de reposo y si, moviéndose hacia la Tierra, la aceleración se toma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre él y el centro de la Tierra. Tómese el radio de la Tierra igual a $R_t = 6377$ km, la aceleración de la caída libre igual a $g = 9{,}8$ m/s^2.

2.70. Por el eje Oy en dirección positiva se mueve el punto A (objetivo) con una velocidad constante v. Sobre el plano Oxy se mueve el punto M (perseguidor) con una velocidad constante u ($u > v$) de tal modo, que el vector de velocidad siempre está dirigido hacia el punto A. Determínese el trayecto del punto M (curva de persecución), si en el momento inicial de tiempo $t = 0$ el punto A se encuentra en el origen de coordenadas y el punto M sobre el eje Ox a la distancia $a > 0$ del objetivo.

2.71*. Una viga de largo l, cuyos extremos reposan sobre dos apoyos, está bajo la acción de una carga uniformemente distribuida, de intensidad q. Hállense la ecuación del eje encorvado de la viga y su flexión máxima, escogiendo el origen de coordenadas en la mitad de la viga no cargada.

2.72*. Una viga de largo l, cuyo extremo derecho está

empotrado en la pared, se encorva por la fuerza P aplicada al extremo izquierdo y por la carga uniformemente distribuida, de intensidad q. Hállense la ecuación del eje encorvado de la viga y su flexión máxima.

2.73*. Una viga de largo l, con el extremo izquierdo empotrado, se encorva bajo la acción de una carga uniformemente distribuida, de intensidad q. ¿Qué fuerza P, accionando hacia arriba, debe ser aplicada al extremo derecho de la viga, para que la flexión en el extremo derecho de la viga sea nula?

3. Ecuaciones homogéneas lineales. La ecuación de la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x)\, y = 0 \qquad (5)$$

se llama ecuación diferencial *homogénea lineal* de n-ésimo orden. Si se conoce cualquier solución particular $y_1(x)$ de la ecuación (5), entonces la sustitución $y(x) = y_1(x)\, z(x)$ reduce esta ecuación a la ecuación lineal respecto a la función $z(x)$, que no contiene explícitamente esta función. Por esto, haciendo $z'(x) = u(x)$, obtenemos la ecuación homogénea lineal de orden $n - 1$ respecto a la función $u(x)$.

EJEMPLO 9. Hállese la solución general de la ecuación

$$(x^2 + 1)\, y'' - 2xy' + 2y = 0$$

cerciorándose de que la función $y_1(x) = x$ es una de sus soluciones particulares.

◀ Ya que $y_1'(x) = 1$ e $y_1''(x) = 0$, entonces sustituyendo la expresión $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_1''(x)$ en la ecuación dada nos cercioramos de que la función $y_1(x) = x$ es realmente su solución particular. Pongamos $y = xz$, hallemos $y' = xz' + z$, $y'' = xz'' + 2z'$ y sustituyamos las expresiones y, y' e y'' en la ecuación. Obtenemos

$$(x^2 + 1)(xz'' + 2z') - 2x(xz' + z) + 2xz = 0$$

ó

$$x(x^2 + 1)\, z'' + 2z' = 0.$$

Ahora, haciendo $z' = u$, $z'' = u'$ llegamos a la ecuación de primer orden respecto a u:

$$x(x^2 + 1)\, u' + 2u = 0.$$

Esta es la ecuación con variables separables. Su solución general tiene la forma

$$u = C_1 \frac{x^2 + 1}{x^2},$$

de donde, considerando $u = z'$, obtenemos la ecuación de primer orden respecto a z:

$$dz = C_1 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

Integrando la última ecuación hallamos $z = C_1 \left(x - \frac{1}{x}\right) + C_2$ y por cuanto $y = xz$, entonces obtenemos definitivamente la solución gene-

ral de la ecuación inicial

$$y = C_1 (x^2 - 1) + C_2 x. \blacktriangleright$$

El método expuesto más arriba se generaliza en el caso, cuando son conocidas k soluciones linealmente independientes particulares de la ecuación (5). En este caso, empleando sustituciones adecuadas, el orden de la ecuación puede ser reducido en k unidades.

2.74. Demuéstrese el teorema: si $y_1(x)$ es una solución particular de la ecuación homogénea lineal $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, entonces la función $y_2(x) = y_1(x) \int e^{-\int p(x)\,dx} \times \frac{dx}{y_1^2(x)}$ es también una solución de esta ecuación y la función $y = y_1(x)\left(C_1 + C_2 \int e^{-\int p(x)\,dx} \frac{dx}{y_1^2(x)}\right)$ es su solución general.

2.75. Hállese la solución general de la ecuación $y'' - 6y' + 5y = 0$, si la función e^x es su solución particular.

2.76. Hállese la solución general de la ecuación $y'' - 2y' - 3y = 0$, si la función e^{-x} es su solución particular.

2.77. Hállese la solución general de la ecuación $xy'' + 2y' + xy = 0$ si la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es su solución particular.

2.78. Hállese la solución general de la ecuación $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, si la función x es su solución particular.

2.79. Hállese la solución general de la ecuación $x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, si se conocen sus soluciones particulares $y_1 = x$ e $y_2 = 1/x$.

Se llama *determinante de Wronksi* (*wronskiano*) del sistema de funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ el determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Si el sistema de funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ es linealmente dependiente en el intervalo (a, b), entonces su wronskiano es nulo en todos los puntos de este intervalo. Si por lo menos en un punto $x_0 \in (a, b)$ tenemos $W(x_0) \neq 0$, entonces el sistema de funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ es linealmente independiente en el intervalo (a, b).

Cualquier sistema de n soluciones linealmente independientes $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ de la ecuación (5) se llama *sistema funda-*

mental de soluciones de esta ecuación. El wronskiano del sistema fundamental de soluciones es diferente de cero en todo el intervalo, donde estas soluciones están determinadas (véase el problema 2.98). Si se conoce el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (5), entonces la solución general de esta ecuación tiene la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 10. Está dado el sistema de funciones x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$. Hállese el wronskiano del sistema $W(x)$ y cerciórese de que sobre cierto intervalo el sistema es linealmente independiente. Compóngase la ecuación diferencial homogénea lineal, para la cual este sistema de funciones es un sistema fundamental de soluciones y escríbase la solución general de la ecuación.

◀ Compongamos el wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 1 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}$$

Ya que $W(x) = x$, entonces el sistema es linealmente independiente en todo el eje Ox y, por consiguiente, forma el sistema fundamental de soluciones de cierta ecuación homogénea lineal de tercer orden, cuya solución general es la función $y = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$. Para componer la ecuación diferencial hallemos las derivadas y', y'', y''' y eliminemos las constantes arbitrarias de las expresiones para y, y', y'', y'''. Tenemos

$$\begin{aligned} y &= C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x, \\ y' &= C_1 - C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos x, \\ y'' &= -C_2 \cos x - C_3 \operatorname{sen} x, \\ y''' &= C_2 \operatorname{sen} x - C_3 \cos x. \end{aligned}$$

Es fácil ver que multiplicando las igualdades primera y tercera por -1 y la segunda y la cuarta por x y sumando estas cuatro igualdades, obtendremos

$$xy''' - y'' + xy' - y = 0. \tag{6}$$

Esta es la ecuación diferencial buscada.

Se puede obtener de otro modo si se tiene en cuenta que la solución y de la ecuación buscada, junto con las funciones x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, forma el sistema linealmente dependiente y por eso el wronskiano del sistema de las funciones y, x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} y & x & \cos x & \operatorname{sen} x \\ y' & 1 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ y'' & 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \\ y''' & 0 & \operatorname{sen} x & -\cos x \end{vmatrix} = 0.$$

Abriendo el determinante obtendremos la misma ecuación (6) (¡verifíquese!).

Señalemos que en este ejemplo el wronskiano $W(x) = x$ se anula para $x = 0$, lo que, al parecer, contradice a la afirmación indicada más arriba acerca de que el wronskiano del sistema fundamental de soluciones nunca es igual a cero. Sin embargo, se trata de que esta afirmación es válida sólo para las ecuaciones del tipo (5) con coeficientes continuos $a_1(x), \ldots, a_n(x)$. La ecuación (6) escrita en la forma de (5) tiene el aspecto

$$y''' - \frac{1}{x} y'' + y' - \frac{1}{x} y = 0, \tag{7}$$

es decir, tiene sentido sólo para $x \neq 0$. El sistema de funciones x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ es el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (7) en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, donde el wronskiano $W(x) = x$ es diferente de cero en todos los puntos; ¡en completa correspondencia con la afirmación general mencionada más arriba! ▶

Investíguense respecto a la dependencia lineal los siguientes sistemas de funciones:

2.80. x, $\ln x$.

2.81. $\operatorname{sen} 2x$, $\operatorname{sen} x \cos x$.

2.82. e^{-x}, xe^{-x}.

2.83. x, $2x$, x^2.

2.84. e^x, xe^x, x^2e^x.

2.85. $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sen} 2x$.

2.86. $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$.

2.87. e^x, e^{x+1}.

2.88. x, 0, e^x.

2.89. 1, $\operatorname{sen} x$, $\cos 2x$.

Conociendo el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea lineal fórmese esta ecuación.

2.90. 1, e^{-x}.

2.91. $e^{2x} \cos x$, $e^{2x} \operatorname{sen} x$.

2.92. x^3, x^4.

2.93. 1, x, e^x.

2.94. 1, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$.

2.95. $2x$, $x - 2$, $e^x + 1$.

2.96. e^{3x}, e^{5x}.

2.97. e^{2x}, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$.

2.98.** Demuéstrese que si $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea lineal de n-ésimo orden con coeficientes continuos en cierto intervalo (a, b) y si el wronskiano $W(x)$ de este sistema es nulo para $x_0 \in (a, b)$, entonces $W(x) \equiv 0$ para $a < x < b$.

2.99*. Está dado el sistema de funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ y además en cierto intervalo el wronskiano $W(x)$ de este sistema es diferente de cero. Fórmese la ecuación diferencial homogénea lineal para la cual este sistema, es un sistema fundamental de soluciones.

2.100. Conociendo el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea lineal e^x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, hállese su solución particular que satisfaga las condiciones iniciales: $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -1$.

2.101. Conociendo el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea lineal e^x, e^{2x}, e^{3x}, hállese su solución particular que satisfaga las condiciones iniciales: $y(0) = 6$, $y'(0) = 14$, $y''(0) = 36$.

4. Ecuaciones no homogéneas lineales. La ecuación de la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x), \qquad (8)$$

en la cual $f(x) \not\equiv 0$ se llama ecuación diferencial *no homogénea lineal* de n-ésimo orden.

La solución general de la ecuación (8) se determina por la fórmula

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) \qquad (9)$$

donde $y_0(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente (5) e $\tilde{y}(x)$ es cierta solución particular de la ecuación no homogénea (8).

EJEMPLO 11. Está dada la ecuación diferencial no homogénea lineal $xy''' - y'' + xy' - y = 2x^3$.

Es conocido que la función x^3 es su solución particular. Se exige hallar la solución general de esta ecuación.

◀ Según la fórmula (9) la solución general de la ecuación no homogénea se forma como la suma de la solución general $y_0(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente y de la solución particular $\tilde{y}(x)$ de la ecuación no homogénea. En nuestro caso $y_0(x) = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$ (véase el ejemplo 10) e $\tilde{y}(x) = x^3$. Por consiguiente, la solución general buscada es $y = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x + x^3$. ▶

Si es conocida la solución general $y_0(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ de la ecuación homogénea (5) correspondiente a la ecuación (8), entonces para determinar la solución particular $\tilde{y}(x)$ de la ecuación (8) se puede emplear el método de Lagrange de variación de las constantes arbitrarias.

Precisamente buscaremos la solución particular de la ecuación no homogénea (8) en forma $\tilde{y}(x) = C_1(x)\, y_1(x) + \ldots + C_n(x)\, y_n(x)$, donde exigiremos complementariamente que las funciones $C_1(x)$, ..., $C_n(x)$ satisfagan las condiciones $\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(k)} \frac{dC_\nu(x)}{dx} = 0$ para todos los $k = 0, 1, \ldots, n-2$ (donde $y_\nu^{(0)} = y_\nu$). Entonces para las funciones $C_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ obtendremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
&y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0,\\
&y_1' \frac{dC_1}{dx} + y_2' \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n' \frac{dC_n}{dx} = 0, \qquad (10)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} = f(x).
\end{aligned}$$

El determinante de este sistema es el wronskiano diferente de cero del sistema fundamental de soluciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, por eso el sistema tiene una única solución respecto a $\frac{dC_\nu}{dx}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

EJEMPLO 12. Conociendo que las funciones $y_1(x) = \frac{\cos x}{x}$ o $y_2(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación $xy'' + 2y' + xy = 0$ (véase el problema 2.77), hállese la solución general de la ecuación

$$xy'' + 2y' + xy = x. \tag{11}$$

◀ La solución general de la ecuación homogénea correspondiente se escribe en la forma $y_0(x) = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Considerando C_1 y C_2 como funciones de x, para determinar la solución particular de la ecuación (11) formemos el sistema del tipo (10):

$$C_1'(x) \frac{\cos x}{x} + C_2'(x) \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0,$$

$$C_1'(x) \left(\frac{\cos x}{x}\right)' + C_2'(x) \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)' = 1$$

(la ecuación (11) debe ser reducida a la forma (8), es decir, todos sus términos deben ser divididos por x). Sustituyendo los valores $C_2'(x) = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} C_1'(x)$ en la segunda ecuación obtendremos

$$C_1'(x) \left(\frac{-x \operatorname{sen} x - \cos x}{x^2} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\right) = 1.$$

De aquí tenemos $C_1' = -x \operatorname{sen} x$, $C_2' = x \cos x$.

Después de la integración obtendremos

$$C_1(x) = x \cos x - \operatorname{sen} x + \overline{C}_1,$$

$$C_2(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x + \overline{C}_2$$

y la solución particular buscada

$$\tilde{y}(x) = (x \cos x - \operatorname{sen} x) \frac{\cos x}{x} + (x \operatorname{sen} x + \cos x) \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Por consiguiente, la solución general de la ecuación (11) tiene la forma

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\operatorname{sen} x}{x} + 1. \blacktriangleright$$

Si el segundo miembro de la ecuación no homogénea lineal (8) es la suma de varias funciones

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_r(x)$$

e $\tilde{y}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ son ciertas soluciones particulares de las ecuaciones

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f_i(x)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r)$$

respectivamente, entonces la suma

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) + \ldots + \tilde{y}_r(x)$$

es una solución particular de la ecuación (8) (*principio de superposición de soluciones*).

EJEMPLO 13. Verificando que la función $\tilde{y}_1 = -\frac{1}{4}e^x$ es la solución particular de la ecuación $y'' - 2y' - 3y = e^x$ y la función $\tilde{y}_2 = -\frac{1}{3}e^{2x}$ es la solución particular de la ecuación $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$, hállese la solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' - 3y = e^x + e^{2x}.$$

◀ De acuerdo con el principio de superposición la función $\tilde{y} = -\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}$ es la solución particular de la última ecuación. La solución general de la ecuación homogénea lineal correspondiente es la función $y_0 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$ (véase el problema 2.76). Según la fórmula (9) la solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}. \blacktriangleright$$

2.102. Empleando la solución del problema 2.92 escríbase la solución general de la ecuación $x^2y'' - 6xy' + 12y = 3x$, cerciorándose previamente de que la función $x/2$ es una de las soluciones de esta ecuación.

2.103. Empleando la solución del problema 2.97 escríbase la solución general de la ecuación $y''' - 2y'' + y' - 2y = 10\,e^{3x}$, cerciorándose previamente de que la función e^{3x} es una de las soluciones de esta ecuación.

2.104. Comprobando que las funciones $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = x$ forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación $(x - 1)\,y'' - xy' + y = 0$, hállese la solución general de la ecuación $(x - 1)y'' - xy' + y = (x - 1)^2$.

2.105. Comprobando que las funciones $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = x \cos x$ forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación $\operatorname{ctg} x \cdot y'' + 2y' + (2 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\, y = 0$, hállese la solución general de la ecuación $\operatorname{ctg} x \cdot y'' + 2y' + (2 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\, y = \cos^2 x$.

2.106. Comprobando que la función $\widetilde{y}_1(x) = 5x + 6$ es la solución particular de la ecuación $y'' - 6y' + 5y = 25x$ y la función $\widetilde{y}_2(x) = -e^{2x}$ es solución particular de la ecuación $y'' - 6y' + 5y = 3e^{2x}$, hállese la solución general de la ecuación $y'' - 6y' + 5y = 25x + 3e^{2x}$ (véase el problema 2.75).

2.107. Comprobando que la función $\widetilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}e^x$ es la solución particular de la ecuación $y''' + y' = e^x$ y la función $\widetilde{y}_2(x) = -\operatorname{sen} 2x$ es la solución particular de la ecuación $y''' + y' = 6\cos 2x$, hállese a solución general de la ecuación $y''' + y' = e^x + 6\cos 2x$ (véase el problema 2.94).

5. Ecuaciones homogéneas lineales con coeficientes constantes. La forma general de la ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{12}$$

donde a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) son constantes reales.

La ecuación

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{13}$$

obtenida sustituyendo las derivadas $y^{(k)}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) de la función buscada por las potencias λ^k, se llama *ecuación característica* para la ecuación (12). A cada raíz real λ de la ecuación (13) de multiplicidad r corresponden r soluciones linealmente independientes de la ecuación (12):

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{\lambda x}$$

y a cada par de raíces complejas $\lambda = \alpha \pm i\beta$ de multiplicidad s corresponden s pares de soluciones linealmente independientes:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

De este modo si la ecuación característica tiene k raíces reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de multiplicidades $r_1, \ldots, r_k$ y l pares de raíces complejas conjugadas $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_l + i\beta_l, \alpha_l - i\beta_l$ de multiplicidades $s_1, \ldots, s_l$ ($r_1 + \ldots + r_k + 2s_1 + \ldots + 2s_l = n$), entonces la solución general de la ecuación (12) se escribirá en forma

$$y(x) = P_1(x)\,e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_k(x)\,e^{\lambda_k x} + (Q_1(x) \times$$
$$\times \cos\beta_1 x + R_1(x)\operatorname{sen}\beta_1 x)\,e^{\alpha_1 x} + \ldots + (Q_l(x)\cos\beta_l x +$$
$$+ R_l(x)\operatorname{sen}\beta_l x)\,e^{\alpha_l x}, \tag{14}$$

donde $P_\nu(x)$ es un polinomio arbitrario de grado $r_\nu - 1$, $\nu = 1, \ldots, \ldots, k$ y $Q_\mu(x)$ y $R_\mu(x)$ son polinomios arbitrarios de grado $s_\mu - 1$, $\mu = 1, \ldots, l$.

EJEMPLO 14. Hállese la solución general de la ecuación

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

◀ La ecuación característica $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ tiene las raíces $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$. Escribamos el sistema fundamental de soluciones $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-3x}$. Por consiguiente, la solución general tiene la forma $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$. ▶

EJEMPLO 15. Hállese la solución general de la ecuación

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

◀ La ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ tiene las raíces $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Por consiguiente, las funciones $y_1 = e^{-x} \cos 2x$, $y_2 = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$ forman el sistema fundamental de soluciones y la solución general tiene la forma

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x).$$

EJEMPLO 16. Hállese la solución particular de la ecuación

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.

◀ La ecuación característica $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ tiene una raíz única $\lambda = 1$ de multiplicidad $r = 3$. Por eso el sistema fundamental de soluciones tiene la forma $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2 e^x$. Por consiguiente

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x$$

es la solución general de la ecuación.

Para determinar las constantes arbitrarias hallemos las derivadas

$$y' = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x + (C_2 + 2C_3 x) e^x,$$
$$y'' = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x + 2(C_2 + 2C_3 x) e^x + 2C_3 e^x$$

empleemos las condiciones iniciales. Obtenemos: $C_1 = 1$, $C_1 + C_2 = 2$, $C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 3$, de donde $C_2 = 1$, $C_3 = 0$. Por consiguiente, la solución particular buscada tiene la forma

$$y = (1 + x) e^x. ▶$$

EJEMPLO 17. Hállese la solución general de la ecuación

$$4y^{IV} + 4y'' + y = 0.$$

◀ La ecuación característica $4\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1 = 0$ o $(2\lambda^2 + 1)^2 = 0$ tiene dos raíces complejas conjugadas $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$ de multiplicidad 2. Por lo tanto, el sistema fundamental de soluciones tiene la forma $\cos \frac{x}{\sqrt{2}}$, $x \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}$, $x \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}$. De aquí obtenemos la solución general:

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + (C_3 + C_4 x) \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}. ▶$$

2.108. Se conoce la solución particular $y_1 = e^{kx}$ de la ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden con coeficientes constantes. La ecuación característica correspondiente tiene un discriminante igual a cero. Hállese la solución particular de esta ecuación que satisface las condiciones iniciales: $y(0) = y'(0) = 1$.

A partir de las raíces dadas de la ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea lineal con coeficientes constantes fórmese la ecuación diferencial y escríbase su solución general.

2.109. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$. **2.110.** $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

2.111. $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$. **2.112.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

2.113. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

2.114. Muéstrese que la solución general de la ecuación

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \alpha^2 x = 0$$

puede ser representada en forma de $x = A \operatorname{sen}(\alpha t + \varphi)$ o $x = A \cos(\alpha t + \varphi)$, donde A y φ son constantes arbitrarias

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales:

2.115. $y'' - 2y' - 2y = 0$. **2.116.** $y'' + 6y' + 13y = 0$.

2.117. $y'' - 6y' + 9y = 0$. **2.118.** $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

2.119. $4y'' - 8y' + 5y = 0$. **2.120.** $4y'' + 4y' + y = 0$.

2.121. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$.

2.122. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$.

2.123. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

2.124. $y^{IV} - y'' = 0$.

2.125. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$, **2.126.** $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$.

2.127. $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$.

2.128. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

2.129. $y^{VI} - 2y^{V} + 3y^{IV} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$.

2.130. $y^{VI} - 2y^{V} + y^{IV} = 0$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones a base de las condiciones iniciales dadas:

2.131. $y'' - 5y' + 4y = 0$; $y(0) = y'(0) = 1$.

2.132. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(2) = 1$, $y'(2) = -2$.

2.133. $y''' - y' = 0$; $y(0) = 3$; $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.

2.134*. Hállese la curva integral de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto O (0, 0).

2.135. Hállese la curva integral de la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 3y = 0$ que es tangente a la recta $2x - 2y + 9 = 0$ en el punto M_0 (0, 2).

6. Ecuaciones no homogéneas lineales con coeficientes constantes. Analicemos la ecuación diferencial no homogénea lineal con coeficientes constantes, es decir, la ecuación del tipo

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (15)$$

donde a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son constantes reales y $f(x) \not\equiv 0$.

Según la fórmula (9) la solución general de la ecuación (15) se escribe en la forma $y(x) = y_0(x) + \widetilde{y}(x)$, donde $y_0(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente e $\widetilde{y}(x)$ es cualquier solución particular de la ecuación (15). La solución general $y_0(x)$ se da por la fórmula (14). Para determinar $\widetilde{y}(x)$ en el caso general se puede aplicar el método de Lagrange de variación de las constantes arbitrarias (véase el p. 4).

En el caso particular cuando la función $f(x)$ en la ecuación (15) tiene la forma $f_1(x) = (d_0 x^m + \ldots + d_m) e^{\lambda x}$ o $f_2(x) = ((b_0 x^{m_1} + \ldots + b_{m1}) \cos \beta x + (c_0 x^{m_2} + \ldots + c_{m2}) \operatorname{sen} \beta x) e^{\alpha x}$ la solución particular $\widetilde{y}(x)$ se puede hallar por el método de coeficientes indeterminados. Precisamente, si λ o $\alpha \pm i\beta$ no coinciden con ninguna de las raíces reales o complejas de la ecuación característica (13), respectivamente, entonces $\widetilde{y}(x)$ se busca en forma de

$$\widetilde{y}(x) = (D_0 x^m + D_1 x^{m-1} + \ldots + D_m) e^{\lambda x} \quad (16)$$

para $f(x) = f_1(x)$ o en forma de

$$\widetilde{y}(x) = ((B_0 x^{\widetilde{m}} + \ldots + B_{\widetilde{m}}) \cos \beta x + (C_0 x^{\widetilde{m}} + \ldots + C_{\widetilde{m}}) \operatorname{sen} \beta x) e^{\alpha x} \quad (17)$$

para $f(x) = f_2(x)$. Aquí D_ν, B_ν y C_ν son coeficientes indeterminados, $m = \max(m_1, m_2)$.

Si λ o $\alpha \pm i\beta$ coinciden con cierta raíz de la ecuación (13) de multiplicidad r, entonces la expresión en el segundo miembro (16) o (17) es conveniente multiplicarla complementariamente por x^r, es decir, buscar la solución respectivamente en forma de

$$\widetilde{y}(x) = x^r (D_0 x^m + \ldots + D_m) e^{\lambda x} \quad (18)$$

para $f(x) = f_1(x)$ o

$$\widetilde{y}(x) = x^r((B_0 x^{\widetilde{m}} + \ldots + B_{\widetilde{m}}) \cos \beta x + (C_0 x^{\widetilde{m}} + \ldots + C_{\widetilde{m}}) \operatorname{sen} \beta x) e^{\alpha x} \quad (19)$$

para $f(x) = f_2(x)$.

EJEMPLO 18. Hállese la solución general de la ecuación

$$y''' + y' = \operatorname{tg} x.$$

◀ La solución general de la ecuación homogénea correspondiente $y_0 = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$, puesto que $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \operatorname{sen} x$. Para hallar la solución particular de la ecuación no homogénea utilicemos el método de variación de constantes. El sistema (10) en este caso toma la forma

$$\begin{aligned} C_1' + C_2' \cos x + C_3' \operatorname{sen} x &= 0, \\ -C_2' \operatorname{sen} x + C_3' \cos x &= 0, \\ -C_2' \cos x - C_3' \operatorname{sen} x &= \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros de la segunda ecuación por sen x, de la tercera por cos x y sumándolos, obtendremos $C_2' = -\operatorname{sen} x$. Entonces de la segunda ecuación se sigue que $C_3' = -\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$. Sumando ambos miembros de la primera y tercera ecuaciones hallaremos que $C_1' = \operatorname{tg} x$. La integración nos da:

$$C_1 = -\ln|\cos x|, \quad C_2 = \cos x, \quad C_3 = \operatorname{sen} x - \ln \operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right|.$$

Por consiguiente, la solución general buscada de la ecuación no homogénea tiene la forma

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x - \ln|\cos x| - \operatorname{sen} x \cdot \ln \operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right|. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 19. Hállese la solución general de la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)\, e^{3x}.$$

◀ La ecuación característica de la ecuación homogénea correspondiente $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ tiene la raíz $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Por consiguiente, el sistema fundamental de soluciones tiene la forma $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ y la solución general de la ecuación homogénea es $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Para hallar la solución particular de la ecuación no homogénea empleemos el método de coeficientes indeterminados. Ya que $\lambda = 3$ no es raíz de la ecuación característica, entonces la solución particular la buscaremos en la forma de $\tilde{y} = (D_0 x^2 + D_1 x + D_2)\, e^{3x}$. Determinando las derivadas $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ y sustituyendo $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ e $\tilde{y}''$ en la ecuación inicial obtendremos (al simplificar por e^{3x}):

$$2D_0 x^2 + (6D_0 + 2D_1)\, x + (2D_0 + 3D_1 + 2D_2) = x^2 + x.$$

Comparando los coeficientes de ambos miembros de esta identidad obtendremos el sistema de ecuaciones para determinar las incógnitas D_0, D_1, D_2:

$$\begin{aligned} 2D_0 &= 1, \\ 6D_0 + 2D_1 &= 1, \\ 2D_0 + 3D_1 + 2D_2 &= 0, \end{aligned}$$

de donde $D_0 = 1/2$, $D_1 = -1$, $D_2 = 1$.

Así pues, $\widetilde{y} = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)e^{3x} = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x}$, y, por consiguiente, la solución general de la ecuación tiene la forma

$$y = y_0 + \widetilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 20. Hállese la solución particular de la ecuación

$$y'' + 4y = 4(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$$

que satisface las condiciones iniciales $y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$.

◀ La ecuación característica $\lambda^2 + 4 = 0$ tiene las raíces $\lambda_{1,2} = 0 \pm 2i$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$.

La solución particular de la ecuación no homogénea la buscaremos en forma de $\widetilde{y} = x(B \cos 2x + C \operatorname{sen} 2x)$, ya que $0 \pm 2i$ son raíces de la ecuación característica de multiplicidad uno. Hallando $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$ y sustituyendo $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$ en la ecuación inicial obtendremos

$$-4B \operatorname{sen} 2x + 4C \cos 2x \equiv 4 \operatorname{sen} 2x + 4 \cos 2x,$$

de donde $B = -1$, $C = 1$ y, por consiguiente

$$\widetilde{y} = x(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x).$$

La solución general será $y = y_0 + \widetilde{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + x(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$.

Para determinar C_1 y C_2 utilicemos las condiciones iniciales diferenciando previamente la solución general:

$$y' = -2C_1 \operatorname{sen} 2x + 2C_2 \cos 2x + x(2 \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x) + (\operatorname{sen} 2x - \cos 2x).$$

Tenemos: $2\pi = C_1 - \pi \Rightarrow C_1 = 3\pi$, $2\pi = 2C_2 + 2\pi - 1 \Rightarrow C_2 = 1/2$. La solución particular buscada es la función

$$y = 3\pi \cos 2x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + x(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x). \blacktriangleright$$

EJEMPLO 21. Hállese la solución general de la ecuación

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}.$$

◀ La ecuación característica $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ tiene la raíz de segundo orden de multiplicidad $\lambda = 2$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es $y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$.

La solución particular de la ecuación dada la buscaremos en forma de $\widetilde{y} = x^2(D_0 x + D_1)e^{2x}$, ya que el indicador del exponente en el segundo miembro de la ecuación coincide con la raíz de segundo orden de multiplicidad de la ecuación característica.

Aplicando el método de coeficientes indeterminados (es decir, hallando $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$, sustituyendo $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$ e $\widetilde{y}''$ en la ecuación inicial, simplificando en e^{2x} y comparando los coeficientes para potencias iguales de x) determinamos $D_0 = 1/6$, $D_1 = 0$. Por consiguiente, $\widetilde{y} = \frac{1}{6}x^3 e^{2x}$ y

la solución general toma la forma

$$y = y_0 + \tilde{y} = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x} + \frac{1}{6}\, x^3 e^{2x} =$$

$$= \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{6}\, x^3\right) e^{2x}. \blacktriangleright$$

Empleando el método de variación de constantes arbitrarias resuélvanse las ecuaciones siguientes:

2.136. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

2.137. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

2.138. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

2.139. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

Para cada una de las ecuaciones diferenciales no homogéneas dadas escríbase la forma de su solución particular con coeficientes indeterminados (no deben hallarse los valores numéricos de los coeficientes):

2.140. $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$.

2.141. $y'' + 16y = \operatorname{sen}(4x + \alpha)$ ($\alpha = \text{const}$).

2.142. $y'' - 4y' = 2 \cos^2 4x$.

2.143. $y^{IV} + 4y'' + 4y = x \operatorname{sen} 2x$.

2.144. $y'' - 4y' = xe^{4x}$.

2.145. $y'' - 7y' = (x - 1)^2$.

2.146. $y'' + 2y' + 5y = e^x ((x + 1) \cos 2x + 3 \operatorname{sen} 2x)$.

2.147. $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} (x^2 \cos 3x - x \operatorname{sen} 3x)$.

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones siguientes:

2.148. $y'' - y = e^{-x}$.

2.149. $y'' - y = \operatorname{ch} x$.

2.150. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

2.151. $y'' - 5y' + 6y = 13 \operatorname{sen} 3x$.

2.152. $y'' - 2my' + m^2 y = \operatorname{sen} nx$ ($m \neq n$).

2.153. $y'' - 2my' + m^2 y = \operatorname{sen} mx$.

2.154. $y'' + y = 4x \cos x$.

2.155. $y'' + 4y = \cos^2 x$.

2.156. $4y'' - y = x^3 - 24x$.

2.157. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$.

2.158. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$

2.159. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$.

2.160. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$.

2.161. $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.

2.162. $y^{IV} - y = xe^x + \cos x$.

2.163. $y^V - y^{IV} = xe^x - 1$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales:

2.164. $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

2.165. $y''' - y' = -2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

2.166. $y'' + 4y = x$; $y(0) = 1$, $y(\pi/4) = \pi/2$.

2.167. $y'' + y = 4e^x$; $y = (0) = 4$, $y'(0) = -3$.

2.168. $y^{IV} - y = 8e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 6$.

2.169. $y^{IV} - y = 8e^x$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y'' = (0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

2.170. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$; $y(\pi) = \pi e^\pi$, $y'(\pi) = e^\pi$.

7. Ecuaciones diferenciales de Euler. La ecuación del tipo

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \quad x \neq 0,$$

donde a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son constantes, es un caso particular de la ecuación diferencial lineal con coeficientes variables y se llama *ecuación de Euler*. Introduzcamos una nueva variable independiente t con ayuda de la sustitución de $x = e^t$ (si $x > 0$) o de la sustitución de $x = -e^t$ (si $x < 0$). Para más precisión sea $x > 0$. Entonces $y'_x = e^{-t} y'_t$, $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$, $y'''_{xxx} = e^{-3t}(y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t)$, etc., y la ecuación de Euler se transforma en ecuación lineal con coeficientes constantes.

La ecuación del tipo

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots$$

$$\ldots + a_{n-1} (ax + b) y' + a_n y = f(x),$$

donde a, b, a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son constantes, se reduce a la ecuación lineal con coeficientes constantes sustituyendo $ax + b = e^t$ (en la región $ax + b > 0$).

La solución de la ecuación homogénea de Euler

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

se puede buscar (para $x > 0$) en forma de $y = x^\lambda$.

Sustituyendo la expresión para y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$ en la ecuación homogénea de Euler, hallamos la ecuación característica para determinar el exponente de la potencia λ. Además, si λ es la raíz real de la ecuación característica de multiplicidad r, entonces le corresponde r

soluciones linealmente independientes

$$x^\lambda,\ x^\lambda \ln x,\ x^\lambda (\ln x)^2,\ \ldots,\ x^\lambda (\ln x)^{r-1},$$

y si $\alpha \pm i\beta$ es un par de raíces complejas de multiplicidad s, entonces le corresponde s pares de soluciones linealmente independientes

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x),\ x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x),\ \ldots,\ x^\alpha (\ln x)^{s-1} \cos(\beta \ln x),$$

$$x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x),\ x^\alpha \ln x \operatorname{sen}(\beta \ln x),\ \ldots,\ x^\alpha (\ln x)^{s-1} \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

EJEMPLO 22. Hállese la solución general de la ecuación no homogénea de Euler $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.

◀ Pongamos $x = e^t$ considerando $x > 0$. Entonces $y'_x = e^{-t}y'_t$, $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$ y nuestra ecuación tomará la forma de

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t) - 3e^t e^{-t}y'_t + 5y = 3e^{2t}$$

ó

$$y''_{tt} - 4y'_t + 5y = 3e^{2t}.$$

La solución general y_0 de la ecuación homogénea correspondiente es $y_0 = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t)$ y la solución particular $\tilde{y}$ de la ecuación no homogénea la buscaremos en forma de $\tilde{y} = Ae^{2t}$. Entonces $\tilde{y}' = 2Ae^{2t}$, $\tilde{y}'' = 4Ae^{2t}$ y, sustituyendo $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ en la ecuación no homogénea, llegamos a la identidad $Ae^{2t} \equiv 3e^{2t}$, de donde $A = 3$. Por consiguiente, $\tilde{y} = 3e^{2t}$ y la solución general de la ecuación no homogénea es $y = y_0 + \tilde{y} = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + 3)$. Volviendo a la variable independiente inicial x obtendremos definitivamente

$$y = x^2(C_1 \cos \ln x + C_2 \operatorname{sen} \ln x + 3).$$

Si se considera el caso $x < 0$, entonces la solución general se puede escribir en la forma que abarca ambos casos:

$$y = x^2(C_1 \cos \ln |x| + C_2 \operatorname{sen} \ln |x| + 3). \blacktriangleright$$

EJEMPLO 23. Hállese la solución general de la ecuación homogénea de Euler

$$(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0.$$

◀ Pongamos $y = (x+2)^\lambda$. Entonces tenemos $y' = \lambda(x+2)^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda-1)(x+2)^{\lambda-2}$. Sustituyendo las expresiones y, y', y'' en la ecuación dada obtendremos la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Por consiguiente la solución general es la función

$$y = C_1(x+2) + \frac{C_2}{(x+2)^3}. \blacktriangleright$$

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones de Euler:

2.171. $x^2y'' + xy' + y = 0$.

2.172. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$.

2.173. $x^2y'' - 6y = 12 \ln x$.

2.174. $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$.

2.175. $x^2y''' - 2y' = 0$.

2.176. $(2x + 1)^2y'' - 2(2x + 1)y' + 4y = 0$.

8. Problemas de contorno en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales. En muchos problemas de física se tiene que buscar solución de las ecuaciones diferenciales no a base de las condiciones iniciales dadas, sino por sus valores en los extremos del intervalo. Tales problemas se llaman problemas *de contorno (frontera)*. El aspecto general de las condiciones de contorno para el intervalo (a, b), en el caso de la ecuación de segundo orden, es el siguiente:

$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = A, \quad \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \tag{20}$$

donde α_0, α_1, β_0, β_1 son constantes dadas, simultáneamente diferentes de cero. Las condiciones de contorno se llaman homogéneas, si del hecho de que las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ satisfacen estas condiciones se deduce, que sus combinaciones lineales $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ también satisfacen estas condiciones. Las condiciones de contorno (20) para $A = B = 0$, evidentemente, son homogéneas.

Los problemas de contorno no siempre son resolubles. Cuando se resuelve el problema de contorno, primeramente se determina la solución general de la ecuación diferencial dada y a partir de las condiciones de frontera se obtiene el sistema con ayuda del cual se determinan los valores de las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, con las cuales de la solución general se obtiene la solución del problema de contorno dado.

EJEMPLO 24. Hállese la solucion de la ecuación $y'' + y = 1$ que satisface las condiciones $y'(0) = y'(\pi) = 0$.

▶ La ecuación inicial tiene la solución general de la forma

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + 1.$$

A partir de las condiciones de frontera obtenemos: $y'(0) = C_2 = 0$ e $y'(\pi) = -C_2 = 0$, así pues la función $y(x) = C_1 \cos x + 1$ satisface las condiciones de frontera para cualesquiera C_1. ◀

EJEMPLO 25. Hállese la solución particular de la ecuación

$$y'' - 2y' + 2y = e^x$$

que satisface las condiciones de contorno

$$y(0) + y(\pi/2) = e^{\pi/2}, \quad y'(0) + y'(\pi/2) = 1.$$

◀ La ecuación característica $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ tiene las raíces $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es $y_0 = e^x(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$.

Buscaremos la solución particular de la ecuación no homogénea en forma de $\tilde{y} = Ae^x$. Sustituyendo $\tilde{y}' = Ae^x$ o $\tilde{y}'' = Ae^x$ en la ecuación dada obtendremos $Ae^x = e^x$, de donde $A = 1$. Así, $\tilde{y} = e^x$ y la solución general de la ecuación de partida tiene la forma

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + 1).$$

Hallando

$$y' = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + 1) + e^x (-C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x),$$

utilizamos las condiciones de contorno. Obtendremos el sistema de ecuaciones para determinar C_1 y C_2:

$$(C_1 + 1) + e^{\pi/2} (C_2 + 1) = e^{\pi/2},$$

$$(C_1 + C_2 + 1) + e^{\pi/2} (-C_1 + C_2 + 1) = 1.$$

Resolviendo este sistema hallamos

$$C_1 = \frac{e^{\pi} - 1 - e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}}, \qquad C_2 = \frac{1 - 2e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}},$$

es decir, la solución particular buscada es la función

$$y = e^x \left(\frac{e^{\pi} - 1 - e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}} \cos x + \frac{1 - 2e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}} \operatorname{sen} x + 1 \right). \blacktriangleright$$

Hállense las soluciones de las ecuaciones diferenciales que satisfacen las condiciones de contorno dadas:

2.177. $y'' - y = 0$; $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$.

2.178. $y'' - y = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

2.179. $y'' + y = 0$; $y'(0) = 0$, $y'(1) = 1$.

2.180. $y'' + y = 0$; $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 1$.

2.181. $yy'' + y'^2 + 1 = 0$; $y(0) = 1$, $y(1) = 2$.

2.182. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$.

2.183. $yy' + y'^2 + yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y(-1) = 0$.

2.184. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2$, $y(0) + 2y'(0) = 1$, $y(1) - y'(1) = 0$.

9. Problemas de carácter físico

2.185*. Un punto material de masa m se mueve rectilíneamente bajo la acción de la fuerza de atracción hacia el centro inmóvil, siendo esta fuerza proporcional a la distancia desde el punto hasta el centro (el coeficiente de proporcionalidad es mk^2). La fuerza de resistencia del medio ambiente es proporcional a la velocidad (el coeficiente de proporcionalidad es $2mh > 0$). En el momento inicial la distancia entre el punto y el centro es igual a a y la velocidad está dirigida por la recta que une el punto con el centro y es igual a v_0. Determínese la ley del movimiento del punto, si tenemos que $h < k$.

2.186*. Un punto material de masa m se mueve rectilíneamente bajo la acción de la fuerza de repulsión a partir de un centro inmóvil, siendo esta fuerza proporcional a la distancia desde el punto hasta el centro (el coeficiente de proporcionalidad es $k > 0$). La fuerza de resistencia del medio ambiente es proporcional a la velocidad (el coeficiente de proporcionalidad $\lambda > 0$). En el momento inicial el punto se encuentra a la distancia a del centro, la velocidad es igual a v_0 y está dirigida por la recta que une el punto con el centro. Determínese la ley del movimiento del punto.

2.187*. Un tubo estrecho y largo gira con una velocidad angular constante ω cerca del eje vertical, perpendicular a él. Una bola que se encuentra dentro del tubo se desliza por el mismo sin rozamiento. Hállese la ley del movimiento de la bola respecto al tubo, si:

a) en el momento inicial la bola se encuentra a la distancia a del eje de rotación y la velocidad inicial de la bola es nula;

b) en el momento inicial la bola se encuentra en el eje de rotación y tiene una velocidad inicial de v_0.

2.188. Un tubo estrecho y largo gira con una velocidad angular constante ω cerca del eje vertical, perpendicular a él. Una bola que se encuentra dentro del tubo se desliza por él con un rozamiento, cuya magnitud es $R = 2m\mu\omega \frac{dr}{dt}$, donde μ es el coeficiente de rozamiento del deslizamiento. Hállese la ley del movimiento de la bola, si en el momento inicial la bola se encuentra a la distancia a del eje de rotación y su velocidad inicial es nula.

2.189*. Una cadena homogénea pesada está echada sobre un clavo liso de tal modo, que por un lado cuelga una parte de la cadena, de 8 m de largo y por el otro, otra parte de 10 m de largo. ¿Cuánto tiempo T tardará la cadena en caer, deslizándose del clavo?

2.190*. Una carga de una masa de 4 kg está colgada de un resorte y lo alarga en 1 cm. Hállese la ley del movimiento de la carga, si el extremo superior del resorte realiza una oscilación armónica vertical $y = 2 \operatorname{sen} 30t$ (cm) y en el momento inicial la carga está en reposo (despréciese la resistencia del medio ambiente).

2.191.* Un circuito eléctrico consta de una fuente de corriente eléctrica con una f.e.m. $e(t) = E \operatorname{sen} \omega t$, una inductancia L, una resistencia R y una capacidad C conec-

tadas en serie; además, $R^2C - 4L < 0$, $\omega \neq \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Hállese la corriente i en el circuito como función del tiempo t, si $i\Big|_{t=0} = \frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = 0$.

2.192.** Un circuito eléctrico consta de una fuente de corriente eléctrica con una f.e.m. $e(t) = E \operatorname{sen} \omega t$, una inductancia L y una capacidad C conectadas en serie; además, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (el caso de resonancia). Hállese la corriente i como función del tiempo t, si $i\Big|_{t=0} = \frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = 0$.

2.193. Un circuito eléctrico consta de una fuente de corriente eléctrica con una f.e.m. $e(t) = E \cos(\omega t + \psi)$, una inductancia L y una capacidad C conectadas en serie; además, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Hállese la corriente i en el circuito como función del tiempo t, si $i\Big|_{t=0} = \frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = 0$.

§ 3. Sistemas de ecuaciones diferenciales

1. Conceptos principales. Relación con las ecuaciones diferenciales de *n*-ésimo orden. Si el sistema de k ecuaciones diferenciales que une la variable independiente x y las k funciones $y_1(x), \ldots, y_k(x)$, está resuelto con respecto a las derivadas de mayor grado de estas funciones $y_1^{(p_1)}(x), \ldots, y_k^{(p_k)}(x)$, es decir, tiene la forma

$$\begin{aligned}
y_1^{(p_1)}(x) &= f_1(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}),\\
y_2^{(p_2)}(x) &= f_2(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_k^{(p_k)}(x) &= f_k(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}),
\end{aligned} \qquad (1)$$

entonces se llama *canónico*; además, el número $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ se llama orden del sistema. El sistema canónico (1) para $p_1 = p_2 = \ldots = p_k = 1$, es decir, el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} y_1' (x) &= f_1 (x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' (x) &= f_2 (x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' (x) &= f_n (x, y_1, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{2}$$

se llama sistema *normal*.

Se llama *solución del sistema* (2) en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ la colección de funciones $y_1 = \varphi_1 (x), \ldots, y_n = \varphi_n (x)$ que son continuamente diferenciables en (a, b) y convierten las ecuaciones del sistema (2) en identidades respecto a $x \in (a, b)$.

Se llama *integral* del sistema normal (2) la función $\Psi (x, y_1, \ldots, y_n)$ determinada y continua, junto con las derivadas parciales $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial y_n}$ en cierto dominio D de variación de las variables y que para cualesquier $x \in (a, b)$ toma un valor constante cuando se sustituye en ella la solución arbitraria del sistema.

La igualdad

$$\Psi (x, y_1, \ldots, y_n) = C,$$

donde $\Psi (x, y_1, \ldots, y_n)$ es una integral del sistema normal y C es una constante arbitraria, se llama *primera integral* del sistema (2).

La ecuación diferencial de n-ésimo orden

$$y^{(n)} = f (x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

puede ser reducida al sistema normal (2). Recíprocamente, los sistemas (1) ó (2), en la mayoría de los casos, se reducen a la ecuación de n-ésimo orden, resolviendo la cual se puede hallar la solución del sistema inicial.

EJEMPLO 1. Redúzcase el sistema canónico de ecuaciones diferenciales

$$y_1' = 2y_1 - 3y_2, \quad y_2' = y_1 - 2y_2$$

a la forma normal.

◀ Pongamos $\frac{dy_1}{dx} = y_3$ y $\frac{dy_2}{dx} = y_4$. Entonces se puede escribir el sistema dado en forma de

$$y_1' = y_3, \quad y_2' = y_4, \quad y_3' = 2y_1 - 3y_2, \quad y_4' = y_1 - 2y_2,$$

que es un sistema normal de cuarto orden. ▶

EJEMPLO 2. Redúzcase al sistema normal la ecuación diferencial $y''_{xx} + k^2 y = 0$.

◀ Pongamos $y'_x = z$, entonces $y''_{xx} = z'_x$ y la ecuación se reduce al sistema normal de ecuaciones

$$y'_x = z, \quad z'_x = -k^2 y. \ ▶$$

EJEMPLO 3. Redúzcase el sistema de ecuaciones

$$y'_x = y - z, \quad z'_x = -4y + z \tag{3}$$

a la ecuación de segundo orden y hállese la solución del sistema.

◀ Hallemos $z(x)$ a partir de la primera ecuación $z = y - y'_x$. De aquí tenemos $z'_x = y'_x - y''_{xx}$. Sustituyendo los valores de z y z' en la segunda ecuación del sistema, obtendremos la ecuación $y'' - 2y' - 3y = 0$ cuya solución general es la función

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

De aquí, empleando la igualdad $z = y - y'_x$, hallamos

$$z(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{3x} = \\ = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}.$$

De este modo, para cualesquiera constantes C_1 y C_2 el sistema de las funciones

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \qquad (4)$$
$$z = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}$$

es la solución del sistema inicial (3). ▶

EL PROBLEMA DE CAUCHY para el sistema (2) se plantea del modo siguiente: hállese la solución $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ del sistema (2), que satisface las condiciones iniciales

$$y_1(x_0) = y_1^0, \; y_2(x_0) = y_2^0, \; \ldots, \; y_n(x_0) = y_n^0, \qquad (5)$$

donde $y_1^0, \ldots, y_n^0$ son números dados.

TEOREMA DE CAUCHY. *Sean determinadas las partes derechas $f_1, f_2, \ldots, f_n$ del sistema normal (2) en el D dominio $(n+1)$-dimensional, de variación de las variables $x, y_1, \ldots, y_n$. Si en algún entorno Δ del punto $M_0(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in D$ las funciones f_ν son continuas y tienen las derivadas parciales continuas $\dfrac{\partial f_\nu}{\partial y_j}$ respecto a las variables $y_1, \ldots, y_n$, entonces existe el intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$ de variación de la variable x en el que existe, además, la única solución del sistema (2) que satisface las condiciones iniciales (5).*

Se llama *solución general* del sistema (2) el conjunto de las funciones

$$y_\nu(x, C_1, \ldots, C_n), \; \nu = 1, 2, \ldots, n, \qquad (6)$$

dependientes de n constantes arbitrarias que para cualesquiera valores admisibles de las constantes $C_1, \ldots, C_n$ convierten las ecuaciones del sistema (2) en identidades, y en el dominio, en el cual se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy, a partir del conjunto de las funciones (6) se puede obtener la solución de cualquier problema de Cauchy.

EJEMPLO 4. Muéstrese que el sistema de funciones determinado por las igualdades (4) es la solucion general del sistema (3) (véase el ejemplo 3).

◀ En calidad de dominio D para (3) podemos tomar la región $-\infty < x, \; y, \; z < +\infty$; además, para cualesquiera x_0, y_0 y z_0 de esta región se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy. Sustituyendo los valores x_0, y_0, z_0 en el sistema (4) obtendremos el sistema para determinar C_1 y C_2:

$$y_0 = C_1 e^{-x_0} + C_2 e^{3x_0},$$
$$z_0 = 2C_1 e^{-x_0} - 2C_2 e^{3x_0}.$$

El determinante de este sistema $\Delta = 2e^{2x_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4e^{2x_0}$ es diferente de cero para todo x_0. Por consiguiente, para cualesquiera y_0 y z_0 los números C_1 y C_2 se determinan unívocamente, es decir, del sistema de funciones (4) se puede obtener cualquier solución del problema de Cauchy para el sistema de ecuaciones diferenciales (3).▶

Eliminando los parámetros a y b hállese el sistema de ecuaciones diferenciales que determinan las familias de rectas en el espacio:

3.1. $\begin{cases} y = ax + b, \\ x^2 + y^2 = z^2 - 2bz. \end{cases}$ 3.2. $\begin{cases} ax + z = b, \\ y^2 + z^2 = b^2. \end{cases}$

Sustitúyanse las ecuaciones diferenciales o los sistemas por los sistemas normales de ecuaciones diferenciales (x es una variable independiente):

3.3. $y''' - xyy' + y'^3 = 0.$

3.4. $y^{IV} - y^2 = 0.$

3.5. $y'' = y' + z'$, $z'' = z' + u'$, $u'' = u' + y'.$

3.6. $z'' + z - 2y = 0$, $y''' + z - y = x.$

3.7. $y'' - z - u = 0$, $z' + uz = x^2$, $u''' = -xy.$

Compruébese que las funciones $y(x)$ y $z(x)$ son soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales:

3.8. $y' = -1/z,$

$z' = 1/y;$ $y = e^{-x/2}$, $z = 2e^{-x/2}.$

3.9. $y' = 1 - 2\frac{y}{x},$

$z' = y + z + \frac{2y}{x} - 1;$ $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{x^2}$, $z = e^x - \frac{x}{3} + \frac{1}{x^2}.$

Verifíquese que las funciones son integrales de los sistemas normales dados:

3.10. $\Psi(x, y, z) = x + y - z;$ $y' = \frac{z}{y - z},$

$z' = \frac{y}{z - y}.$

3.11 $\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;$ $y' = \frac{3x - 4z}{2z - 3y},$

$z' = \frac{4y - 2x}{2z - 3y}.$

3.12. $\Psi(x, y, z) = \frac{1}{y} - \frac{1}{z};$ $y' = y/z,$ $z' = z/y.$

2. Métodos de integración de los sistemas normales. Uno de los métodos utilizados para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales es el método de eliminación de incógnitas, el cual reduce el sistema de ecuaciones a una o varias ecuaciones diferenciales con una función incógnita en cada una. Aclarémoslo con ejemplos (véase también el ejemplo 3).

Ejemplo 5. Hállese la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$y'_x = -z, \quad z'_x = \frac{z^2}{y}$$

y la solución particular que satisface las condiciones iniciales $y(1) = 1$, $z(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

◀ Diferenciando ambos miembros de la primera ecuación respecto a x, obtenemos $y''_{xx} = -z'_x$. Puesto que de la segunda ecuación se deduce que $z'_x = \frac{z^2}{y}$, entonces $y''_{xx} = -\frac{z^2}{y}$, pero de la primera ecuación $z^2 = (y'_x)^2$; por eso, el sistema de dos ecuaciones de primer orden se redujo a una ecuación de segundo orden $y''_{xx} = -\frac{(y'_x)^2}{y}$, es decir, a la ecuación $yy''_{xx} + (y'_x)^2 = 0$.

El primer miembro de la ecuación obtenida es $(yy'_x)'_x$, por eso $yy'_x = \frac{1}{2} C_1$, de donde $y\,dy = \frac{1}{2} C_1\,dx$ y $\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} C_1 x + \frac{1}{2} C_2$, es decir, $y = \pm \sqrt{C_1 x + C_2}$. De la primera ecuación del sistema tenemos: $z = -y'_x$, es decir, $z = \mp \frac{C_1}{2\sqrt{C_1 x + C_2}}$. El sistema de funciones $y = \pm \sqrt{C_1 x + C_2}$, $z = \mp \frac{C_1}{2\sqrt{C_1 x + C_2}}$ forma la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales dado.

Para hallar la solución particular empleemos las condiciones iniciales $y(1) = 1$, $z(1) = -\frac{1}{2}$. Tenemos: $1 = \sqrt{C_1 + C_2}$, $-\frac{1}{2} = -\frac{C_1}{2\sqrt{C_1 + C_2}}$, de donde $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Así pues, el par de funciones $y = \sqrt{x}$, $z = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ es, precisamente, la solución particular buscada del sistema. ▶

No todo sistema de ecuaciones diferenciales puede ser reducido a una ecuación.

Ejemplo 6. Muéstrese que el sistema de ecuaciones

$$y' = xy, \qquad z' + y' = z + xy$$

no puede reducirse a una ecuación.

◀ Efectivamente, sustituyendo en la segunda ecuación en vez de y' su valor xy, obtendremos dos ecuaciones diferenciales no relacio-

nadas entre sí, cada una de las cuales contiene sólo una función

$$y' + xy, \qquad z' = z;$$

a partir de estas ecuaciones hallamos $y = C_1 e^{x^2/2}$ y $z = C_2 e^x$. ▶

Otro método de integración de los sistemas de ecuaciones diferenciales es el *método de separación de las combinaciones integrables*, es decir, de obtención a partir del sistema (2) de una ecuación tal, que se puede integrar y obtener la primera integral del sistema. Si están determinadas n primeras integrales del sistema independientes (2), entonces su conjunto da la integral general de este sistema.

EJEMPLO 7. Hállese la integral general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$y'_x = \frac{z + e^y}{z + e^x}, \qquad z'_x = \frac{z^2 - e^{x+y}}{z + e^x}.$$

◀ Multiplicando ambos miembros de la segunda ecuación del sistema por e^{-x} y sumándolos con los miembros correspondientes de la primera ecuación y con la identidad $-e^{-x}z = -e^{-x}z$, obtendremos $(e^{-x}z)'_x + y'_x = 0$, de donde

$$e^{-x}z + y = C_1 = \Psi_1(x, y, z).$$

Esta es la primera integral del sistema.

Ahora multiplicando ambos miembros de la segunda ecuación por e^{-y} y sumándolos con las igualdades $-e^{-y}zy' = -e^{-y}z\,\frac{z + e^y}{z + e^x}$ y $(x)'_x = 1$ obtendremos $(e^{-y}z)'_x + x'_x = 0$ de donde

$$e^{-y}z + x = C_2 = \Psi_2(x, y, z).$$

Esta es también la primera integral del sistema. Ya que el jakobiano del sistema Ψ_1, Ψ_2 es diferente de cero (¡compruébese!), entonces ambas primeras integrales son independientes entre sí, por eso su conjunto determina implícitamente la solución general del sistema de ecuaciones dado.

Para separar las combinaciones integrables del sistema (2), es más cómodo escribir este último en la así llamada forma simétrica:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dx}{1} \tag{7}$$

y emplear las propiedades siguientes de fracciones iguales: si $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \ldots = \frac{u_n}{v_n} = \gamma$, entonces para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tiene lugar la relación

$$\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n} = \gamma. \tag{8}$$

Los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se escogen habitualmente de tal modo, que el numerador en (8) sea el diferencial total del denominador o que el denominador sea nulo.

En la relación (7) la variable independiente y las funciones buscadas son equitativas.

EJEMPLO 8. Hállese la solución general del sistema de ecuaciones

$$y' = \frac{nz - lx}{ly - nz}, \qquad z' = \frac{nx - my}{ly - nz}.$$

Escribamos el sistema en la forma simétrica:

$$\frac{dx}{ly - nz} = \frac{dy}{nz - lx} = \frac{dz}{nx - my} = \gamma$$

y empleemos la relación (8). Escojemos $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = n$ y $\alpha_3 = l$, entonces tenemos

$$\frac{d(mx + ny + lz)}{0} = \gamma,$$

es decir, $d(mx + ny + lz) = 0$ de donde

$$mx + ny + lz = C_1. \tag{9}$$

De modo análogo, escojiendo $\alpha_1 = 2x$, $\alpha_2 = 2y$ y $\alpha_3 = 2z$, llegamos a la igualdad $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, de donde

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2. \tag{10}$$

Las relaciones (9) y (10) forman las dos primeras integrales del sistema que implícitamente determinan la solución general. ▶

Hállense las soluciones generales de los sistemas de ecuaciones diferenciales:

3.13. $x'_t = \frac{1}{y}$, $y'_t = \frac{1}{x}$. 3.14. $\frac{dt}{xy} = \frac{dx}{ty} = \frac{dy}{tx}$.

3.15. $y'_x = \frac{z}{(z-y)^2}$, $z'_x = \frac{y}{(z-y)^2}$.

3.16. $x'_t = \frac{x-y}{z-t}$, $y'_t = \frac{x-y}{z-t}$, $z'_t = x - y + 1$.

3.17. $y'_x = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2}$, $z'_x = \frac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}$.

3.18. $\frac{dt}{xt} = \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{txy - 2t^2}$.

3.19. $\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$.

3.20. $x'_t = \frac{y^2}{x}$, $y'_t = \frac{x^2}{y}$.

Hállense la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales, así como la solución particular que satisfaga

las condiciones iniciales dadas:

3.21. $y'_x = \frac{z-1}{z}$, $z'_x = \frac{1}{y-x}$; $y(0) = -1$, $z(0) = 1$.

3.22. $y'_x = \frac{x}{yz}$, $z'_x = \frac{x}{y^2}$; $y(0) = z(0) = 1$.

3.23*. Para el sistema de ecuaciones diferenciales $x'_t = \frac{x^2 - t}{y}$, $y'_t = -x$ y las funciones

$$\text{a) } \varphi_1 = t^2 + 2xy; \quad \text{b) } \varphi_2 = x^2 - ty,$$

verifíquese si las relaciones $\varphi_i = C$ $(i = 1, 2)$ son las primeras integrales de este sistema.

3. Sentido físico del sistema normal. Para simplificar limitémonos a examinar el sistema de dos ecuaciones diferenciales, además a título de variable independiente consideraremos el tiempo t:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t, x, y), \\ \dot{y} &= f_2(t, x, y). \end{aligned} \tag{11}$$

La solución $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ de este sistema es cierta curva en el plano Oxy con un sistema de coordenadas rectangular cartesiano fijo. El plano Oxy se llama *plano de fases* y la curva $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, *trayectoria de fases* del sistema (11). El mismo sistema (11) se llama *sistema dinámico*. El sistema dinámico se llama *autónomo (estacionario)* si en el segundo miembro de la ecuación de este sistema el tiempo t no figura explícitamente.

El sistema dinámico determina el campo de velocidades de un punto, que se mueve en el plano, en cualquier momento de tiempo t. La solución del sistema dinámico $x = x(t)$, $y = y(t)$ se halla en las ecuaciones del movimiento del punto: ellas determinan la situación del punto en movimiento, en cualquier momento de tiempo t. Las condiciones iniciales prefijan la situación del punto en el momento inicial: $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Las ecuaciones de movimiento determinan también la trayectoria del movimiento, siendo ecuaciones de esta curva en la forma paramétrica.

EJEMPLO 9. Hállese la trayectoria del sistema dinámico autónomo

$$\dot{x} = \frac{x^2}{y}, \qquad \dot{y} = x,$$

que pasa por el punto $M_0(2, 3)$.

◀ Diferenciemos la segunda ecuación respecto a t y sustituyamos la expresión $x'_t = y''_{tt}$ y $x = y_t$ en la primera ecuación. Obtendremos $y''_{tt} = \frac{(y'_t)^2}{y}$ ó $yy''_{tt} - y'^2_t = 0$, es decir, una ecuación de segundo orden con una función incógnita y.

Dividamos ambos miembros de la última ecuación por y^2 y reescribámosla así: $\left(\frac{y_1'}{y}\right)' = 0$. De aquí se deduce que $\frac{y_1'}{y} = C_1$, o $\frac{dy}{y} = C_1\,dt$ de donde $y = C_2 e^{C_1 t}$.

Hallemos $y_1' = C_1 C_2 e^{C_1 t}$ y sustituyámoslo en la segunda ecuación del sistema: obtendremos $x = C_1 C_2 e^{C_1 t}$. Así pues, el sistema de funciones $x = C_1 C_2 e^{C_1 t}$, $y = C_2 e^{C_1 t}$ es la solución general de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales.

Eliminando de la solución general el tiempo t $(C_2 e^{C_1 t} = y)$ tenemos que las trayectorias de fases del sistema son las rectas $x = C_1 y$, además, por el punto dado $M_0(2, 3)$ pasa la recta $y = \frac{3}{2} x$. ▶

Para los sistemas dados hállense las trayectorias de fases que pasan por los puntos dados M_0:

3.24. $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2$, $\dot{y} = 2x$; $M_0(1, 2)$.

3.25. $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2$, $\dot{y} = 2xy$; $M_0(2, 1)$.

3.26. $\dot{x} = 2x$, $\dot{y} = x + 2y$; $M_0(1, 1)$.

3.27. $\dot{x} = y - x$, $\dot{y} = y - 2x$; $M_0(1, 1)$.

4. Sistemas homogéneos lineales. El sistema homogéneo lineal normal de n-ésimo orden tiene la forma

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n,\\
\dot{x}_2 &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dot{x}_n &+ a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n
\end{aligned} \tag{12}$$

o en la forma matricial

$$\dot{X}(t) = A(t)\,X(t), \tag{13}$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

En la región de continuidad de los coeficientes $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, el sistema (12) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy.

Se llama *sistema fundamental de soluciones* del sistema (12) al conjunto de arbitrarias n soluciones linealmente independientes $X_k(t) = (x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), \ldots, x_n^{(k)}(t))^t$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Si $X_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, es el sistema fundamental de soluciones del sistema (12), entonces la solución general tiene la forma $X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k X_k(t)$, donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

La integración del sistema (12) suele realizarse por el método de eliminación (véase el ejemplo 3).

Resuélvanse los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales:

3.28. $y'_x = -\frac{y}{x} + xz$, $z'_x = -\frac{2y}{x^3} + \frac{z}{x}$.

3.29. $xy'_x = -y + zx$, $x^2 z'_x = -2y + zx$.

3.30. $\dot{x} = -\frac{y}{t}$, $\dot{y} = -\frac{x}{t}$.

3.31. $\dot{x} = -\frac{2}{t}x$, $\dot{y} = y + \frac{t+2}{t}x$.

En el caso particular de los *sistemas con coeficientes constantes*, cuando la matriz $A(t)$ en la parte derecha de (13) no depende de t, para hallar el sistema fundamental de soluciones $X_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, pueden ser aplicados los métodos de álgebra lineal.

De la ecuación característica

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{14}$$

se hallan las diferentes raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ y para toda raíz λ (teniendo en cuenta su multiplicidad) se determina la solución particular $X^{(\lambda)}(t)$ que le corresponde. La solución general del sistema tiene la forma

$$X(t) = \sum_{k=1}^{s} C_k X^{(\lambda_k)}(t). \tag{15}$$

Con esto son posibles los siguientes casos:

a) λ es la raíz real de multiplicidad 1. Entonces

$$X^{(\lambda)}(t) = Y^{(\lambda)} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} y_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ y_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

donde $Y^{(\lambda)}$ es el vector propio de la matriz A que corresponde al valor propio λ (es decir, $AY^{(\lambda)} = \lambda Y^{(\lambda)}$, $Y^{(\lambda)} \neq 0$).

EJEMPLO 10. Hállese la solución particular del sistema homogéneo

$$\dot{x}_1 = 4x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2,$$
$$\dot{x}_3 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,$$

que satisface las condiciones $x_1(0) = 6$, $x_2(0) = -6$, $x_3(0) = 24$.

◀ La ecuación característica (14) para este sistema tiene la forma

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sus raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$. Los vectores propios, por ejemplo, son así

$$Y^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Por eso

$$X^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^t, \quad X^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad X^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

De aquí la solución general del sistema tiene la forma

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Para hallar la solución particular las constantes C_1, C_2, C_3 se determinan a partir del sistema siguiente:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3C_1 + C_3 \\ -9C_1 + C_3 \\ 7C_1 + C_2 + 5C_3 \end{pmatrix},$$

de donde $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$. Definitivamente para la solución particular buscada obtenemos

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} e^{5t}. \blacktriangleright$$

b) λ es la raíz compleja de multiplicidad 1. Entonces la raíz de la ecuación característica (14) es el número $\bar{\lambda}$ conjugado de λ. En vez

de las soluciones particulares complejas $X^{(\lambda)}(t)$ y $X^{(\overline{\lambda})}(t)$ de la forma (15), es conveniente tomar las soluciones particulares reales $X_1^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Re} X^{(\lambda)}(t)$ y $X_2^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Im} X^{(\lambda)}(t)$.

EJEMPLO 11. Hállese la solución general del sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_1 + x_2.$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1 + 3x_2.$$

◀ La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

tiene las raíces complejas conjugadas $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Para encontrar el vector propio que corresponda a la raíz $\lambda = 2 + i$ obtenemos el sistema

$$(-1-i)\, y_1^{(\lambda)} + y_2^{(\lambda)} = 0,$$
$$-2y_1^{(\lambda)} + (1-i)\, y_2^{(\lambda)} = 0.$$

Poniendo $y_1^{(\lambda)} = 1$ hallamos $y_2^{(\lambda)} = 1 + i$, es decir,

$$Y^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \text{ y } X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}.$$

De aquí el par de soluciones particulares reales tiene la forma siguiente:

$$X_1^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}(\cos t - \operatorname{sen} t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t},$$

$$X_2^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\operatorname{sen} t \\ e^{2t}(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Definitivamente obtenemos la solución general

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t} =$$
$$= \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t \\ (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t}. \blacktriangleright$$

c) λ es la raíz de multiplicidad $r \geqslant 2$. La solución del sistema (13) que corresponde a esta raíz se busca en forma del vector

$$X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} t + \ldots + \alpha_1^{(r)} t^{r-1} \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} t + \ldots + \alpha_2^{(r)} t^{r-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} t + \ldots + \alpha_n^{(r)} t^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \qquad (16)$$

cuyos coeficientes $\alpha_i^{(j)}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$, se determinan del sistema de ecuaciones lineales, obtenido igualando los coeficientes para las potencias iguales de t como resultado de la sustitución del vector (16) en el sistema inicial (13).

EJEMPLO 12. Hállese la solución general del sistema

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1 - x_2,$$

$$\dot{x}_2(t) = 4x_1 + 6x_2.$$

◀ La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2+\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 = 0$$

tiene la raíz $\lambda = 4$ de multiplicidad $r = 2$. Por eso buscamos la solución del sistema en forma de

$$X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 t \\ \alpha_2 + \beta_2 t \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Sustituimos esta expresión en el sistema inicial y simplificamos en e^{4t}:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta_1 - 4\beta_2 \\ 4\beta_1 + 6\beta_2 \end{pmatrix} t.$$

Igualando los coeficientes para las potencias iguales de t obtenemos:

$$\begin{aligned} \beta_1 + 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ \beta_2 - 4\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0, \\ 2\beta_1 + \beta_2 &= 0, \\ -2\beta_2 + 4\beta_1 &= 0. \end{aligned}$$

Poniendo $\alpha_1 = C_1$ y $\beta_1 = C_2$ tenemos $\beta_2 = -2C_2$ y $\alpha_2 = -2C_1 - C_2$. De este modo la solución general del sistema tiene la forma

$$X(t) = X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ -(2C_1 + C_2) - 2C_2 t \end{pmatrix} e^{4t}. \blacktriangleright$$

Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En los casos, cuando se dan las condiciones iniciales, además de la solución general, hállese la solución particular:

3.32. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -2x + 3y$.

3.33. $\dot{x} = x + 3y$, $\dot{y} = -x + 5y$, $x(0) = 3$, $y(0) = 1$.

3.34. $\dot{x} = 3x - 2y$, $\dot{y} = 4x + 7y$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

3.35. $\dot{x} = 2x - 5y$, $\dot{y} = 5x - 6y$.

3.36. $\dot{x} = x - 4y$, $\dot{y} = x - 3y$.

3.37. $\dot{x} = -x + 2y$, $\dot{y} = -2x - 5y$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

3.38. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = z$, $\dot{z} = x$, $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

3.39. $\dot{x} = y + z$, $\dot{y} = z + x$, $\dot{z} = x + y$, $x(0) = y(0) = -2$, $z(0) = -1$.

3.40. $\dot{x} = x - 2y - z$, $\dot{y} = -x + y + z$, $\dot{z} = x - z$.

3.41. $\dot{x} = 5x + 2y - 3z$, $\dot{y} = 4x + 5y - 4z$, $\dot{z} = 6x + 4y - 4z$.

5. **Sistemas no homogéneos lineales.** El sistema no homogéneo lineal normal de ecuaciones diferenciales tiene la forma

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}(t)\, x_1 + a_{12}(t)\, x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\, x_n + f_1(t),\\
\dot{x}_2 &= a_{21}(t)\, x_1 + a_{22}(t)\, x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\, x_n + f_2(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}_n &= a_{n1}(t)\, x_1 + a_{n2}(t)\, x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\, x_n + f_n(t),
\end{aligned} \tag{17}$$

donde, por lo menos, una de las funciones $f_k(t)$ no es igual idénticamente a cero. En la forma matricial el sistema (17) tiene la forma

$$\dot{X}(t) = A(t)\, X(t) + F(t) \tag{18}$$

donde $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^{\top}$. Se puede integrar el sistema (17) por el método de eliminación (véase el ejemplo 3), sin embargo, a veces es preferible hallar la solución previa $X_0(t)$ del sistema homogéneo correspondiente

$$\dot{X}(t) = A(t)\, X(t) \tag{19}$$

y una solución particular cualquiera $\widetilde{X}(t)$ del sistema (18). Entonces la solución general del sistema (18) tiene la forma

$$X(t) = X_0(t) + \widetilde{X}(t). \tag{20}$$

Si es conocido el sistema fundamental $X_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, de soluciones del sistema homogéneo (19), entonces la solución general $X(t)$ se puede hallar por el método de variación de constantes arbitrarias. Precisamente, poniendo

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, X_k(t) \tag{21}$$

determinamos las funciones $C_k(t)$ sustituyendo (21) en el sistema (18). Teniendo en cuenta en este caso las igualdades

$$\dot{X}_k(t) - A(t) X_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

llegamos al sistema de ecuaciones respecto a $\dot{C}_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t) X_k(t) = F(t). \tag{22}$$

A partir de este sistema hallamos $\dot{C}_k(t) = \varphi_k(t)$ e integrando obtenemos las funciones $C_k(t)$ con una exactitud de hasta las constantes arbitrarias. Sustituyéndolas en (21) obtenemos la solución general buscada del sistema no homogéneo (18).

EJEMPLO 13. Conociendo el sistema fundamental de soluciones

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}, \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t}$$

del sistema homogéneo

$$\dot{x}_1 = 6x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2,$$

hállese la solución general del sistema no homogéneo

$$\dot{x}_1 = 6x_1 + x_2 + t,$$
$$\dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2 + 1.$$

◀ Apliquemos el método de variación de las constantes arbitrarias. Para las magnitudes $\dot{C}_1(t)$ y $\dot{C}_2(t)$ formemos el sistema de la forma (22)

$$\dot{C}_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + \dot{C}_2(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hallando

$$\dot{C}_1(t) = \frac{5t+1}{6} e^{-7t}, \qquad \dot{C}_2(t) = \frac{1-t}{6} e^{-t}$$

e integrando, obtenemos

$$C_1(t) = -\left(\frac{5}{42} t + \frac{2}{49}\right) e^{-7t} + C_1, \qquad C_2(t) = \frac{1}{6} te^{-t} + C_2.$$

De este modo, la solución general del sistema se escribirá en la forma

$$X(t) = \left(-\left(\frac{5}{42} t + \frac{2}{49}\right) e^{-7t} + C_1\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} +$$
$$+ \left(\frac{1}{6} te^{-t} + C_2\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t} +$$
$$+ \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} t - \frac{2}{49} \\ \frac{5}{7} t - \frac{2}{49} \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Si los coeficientes $a_{ij}(t)$ del sistema (17) son constantes, es decir, $a_{ij}(t) = a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, y las funciones $f_i(t)$ tienen la forma de productos

$$(P(t)\cos\beta t + Q(t)\operatorname{sen}\beta t)\, e^{\alpha t}, \tag{23}$$

donde $P(t)$ y $Q(t)$ son polinomios, entonces la solución particular $\overline{X}(t)$ se puede hallar por el método de coeficientes indeterminados, escribiendo $\widetilde{X}(t)$ en la forma análoga a (23), considerando la coincidencia o no coincidencia de los números $\alpha \pm i\beta$ con las raíces de la ecuación característica.

Debe tenerse en cuenta que si k es el grado mayor de los polinomios $P(t)$ y $Q(t)$ en (23) y $\lambda = \alpha + i\beta$ es la raíz de multiplicidad r de la ecuación característica, entonces la solución particular $\widetilde{X}(t)$ se busca en forma de

$$\widetilde{X}(t) = \operatorname{Re} t^{r-1} \begin{pmatrix} \gamma_{10}t^{k+1} + \gamma_{11}t^k + \ldots + \gamma_{1,\ k+1} \\ \gamma_{20}t^{k+1} + \gamma_{21}t^k + \ldots + \gamma_{2,\ k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{n0}t^{k+1} + \gamma_{n1}t^k + \ldots + \gamma_{n,\ k+1} \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

EJEMPLO 14. Hállese la solución particular del sistema

$$\dot{x}_1 = -x_2 + t^2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + e^t.$$

◀ Ya que la ecuación característica $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ tiene las raíces $\lambda_{1,2} = \pm i$, buscamos la solución particular del sistema en la forma de la suma de un polinomio de segundo grado y la función del tipo De^t:

$$x_1 = A_1t^2 + B_1t + C_1 + D_1e^t, \quad x_2 = A_2t^2 + B_2t + C_2 + D_2e^t.$$

Sustituyendo estas funciones en el sistema dado obtenemos las igualdades

$$2A_1t + B_1 + D_1e^t = -A_2t^2 - B_2t - C_2 - D_2e^t + t^2,$$
$$2A_2t + B_2 + D_2e^t = A_1t^2 + B_1t + C_1 + D_1e + e^t.$$

Igualando los coeficientes para las potencias iguales de t y para e^t obtendremos el sistema

$$2A_1 = -B_2, \quad B_1 = -C_2, \quad D_1 = -D_2, \quad 1 - A_2 = 0,$$
$$2A_2 = B_1, \quad B_2 = C_1, \quad D_2 = D_1 + 1, \quad A_1 = 0.$$

De aquí $A_1 = B_2 = C_1 = 0$, $A_2 = 1$, $B_1 = 2$, $C_2 = -2$, $D_2 = 1/2$, $D_1 = -1/2$, y la solución particular buscada tiene la forma

$$x_1 = 2t - \frac{1}{2}e^t,$$
$$x_2 = t^2 - 2 + \frac{1}{2}e^t. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 15. Hállese la solución general del sistema

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t),$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 + 1 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

tiene la raíz $\lambda = 3$ de multiplicidad 2. La solución general del sistema homogéneo la buscamos en la forma de $X_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix} e^{3t}$, si sustituimos la expresión obtenida en el sistema homogéneo y simplificamos en e^{3t} tenemos

$$3\begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix}.$$

Obtenemos el sistema

$$3(\alpha t + \beta) + \beta = 2(\alpha t + \beta) - (\gamma t + \delta),$$
$$3(\gamma t + \delta) + \delta = \alpha t + \beta + 4(\gamma t + \delta),$$

del cual se deducen dos relaciones independientes $\alpha = -\gamma$ y $\beta + \alpha = -\delta$. Poniendo $\alpha = C_1$ y $\beta = C_2$ tenemos $\gamma = -C_1$ y $\delta = -C_1 - C_2$, es decir,

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} C_1 t + C_2 \\ -C_1 t - (C_1 + C_2) \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Puesto que $F(t)$ contiene el factor e^{3t} y en este caso $\lambda = 3$ es la raíz de la ecuación característica de multiplicidad 2, hallamos la solución particular en la forma de

$$\tilde{X}(t) = t\begin{pmatrix} A_1 t^2 + B_1 t + D_1 \\ A_2 t^2 + B_2 t + D_2 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} A_1 t^3 + B_1 t^2 + D_1 t \\ A_2 t^3 + B_2 t^2 + D_2 t \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\left(\text{y no en la forma de } t^2 \begin{pmatrix} A_1 t + B_1 \\ A_2 t + B_2 \end{pmatrix} e^{3t} \right).$$

Sustituyendo $\tilde{X}(t)$ en el sistema dado y simplificando en e^{3t} obtenemos la igualdad matricial

$$3\begin{pmatrix} A_1 t^3 + B_1 t^2 + D_1 t \\ A_2 t^3 + B_2 t^2 + D_2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3A_1 t^2 + 2B_1 t + D_1 \\ 3A_2 t^2 + 2B_2 t + D_2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 t^3 + B_1 t^2 + D_1 t \\ A_2 t^3 + B_2 t^2 + D_2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix},$$

a cual puede escribirse en la forma de las igualdades

$$A_1t^3 + B_1t^2 + D_1t + 3A_1t^2 + 2B_1t + D_1 =$$
$$= -A_2t^3 - B_2t^2 - D_2t + t + 1,$$
$$-A_2t^3 - B_2t^2 - D_2t + 3A_2t^2 + 2B_2t + D_2 =$$
$$= A_1t^3 + B_1t^2 + D_1t + 2t.$$

Comparando los coeficientes para las potencias iguales de t, obtendremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0, & A_1 + A_2 &= 0, \\ B_1 + 3A_1 + B_2 &= 0, & B_1 + B_2 - 3A_2 &= 0, \\ D_1 + 2B_1 + D_2 &= 1, & D_1 + D_2 - 2B_2 &= -2, \\ D_1 &= 1, & D_2 &= 0. \end{aligned}$$

Encontramos $D_1 = 1$, $D_2 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 3/2$, $A_1 = -1/2$, $A_2 = 1/2$. Por consiguiente,

$$\widetilde{X}(t) = t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 + 1 \\ \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t \end{pmatrix} e^{3t},$$

y la solución general buscada se escribe en la forma

$$X(t) = X_0(t) + \widetilde{X}(t) = \begin{pmatrix} C_1t + C_2 - \frac{1}{2}t^3 + t \\ -C_1t - (C_1 + C_2) + \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix} e^{3t}. \blacktriangleright$$

Hállense las soluciones de los sistemas de ecuaciones siguientes:

3.42. $\dot{x} = 3x - 2y + t$, $\dot{y} = 3x - 4y$.

3.43. $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = x + y + e^t$.

3.44. $\dot{x} = 5x - 3y + te^{2t}$, $\dot{y} = 3x - y + e^{3t}$.

3.45. $\dot{x} = x + y - \cos t$, $\dot{y} = -2x - y + \operatorname{sen} t + \cos t$.

3.46. $\dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1$, $\dot{y} = -x + \operatorname{tg} t$.

3.47*. $\ddot{x} = 2x + 3y$, $\ddot{y} = 4x - 2y$.

3.48*. La sustancia A se descompone en dos sustancias P y Q. La velocidad de formación de cada una de ellas es proporcional a la cantidad de sustancia no descompuesta A. Hállense las leyes según las cuales varían las cantidades x e y de las sustancias P y Q en función del tiempo t, si

al cabo de una hora después de iniciarse el proceso de descomposición $x = \frac{a}{8}$, $y = \frac{3a}{8}$, donde a es la cantidad inicial de la sustancia A.

3.49*. Un punto material de masa m se atrae por el centro O con una fuerza proporcional a la distancia. El movimiento comienza del punto A a la distancia a del centro con una velocidad inicial v_0 perpendicular al segmento OA. Hállese la trayectoria del movimiento.

§ 4. Elementos de la teoría de estabilidad

1. **Conceptos fundamentales.** Sea dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

con las condiciones iniciales en el punto t_0. La solución $X_0(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))^\top$ del sistema (1) se llama *estable según Liapunov*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ se halla $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para toda solución $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$ del mismo sistema, cuyos valores en el punto t_0 satisfacen las desigualdades

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

para todo $t > t_0$, son válidas las desigualdades

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Si tenemos que $\delta > 0$ es tan pequeño como se quiera y que, aunque sea para una solución $X(t)$, las desigualdades (3) no se cumplen, entonces la solución $X_0(t)$ se llama *inestable*.

Si la solución $X_0(t)$ es no sólo estable sino que, además, para la condición (2) satisface la relación

$$\lim_{t\to\infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

entonces esta solución se llama *asintóticamente estable*.

EJEMPLO 1. Investíguese si es estable la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = ax$ $(a \in \mathbb{R})$ determinada por la condición inicial $x_0(t_0) = C_0$.

◀ Si $a \neq 0$, la solución tiene la forma

$$x_0(t) = C_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Sea $x(t) = Ce^{a(t-t_0)}$ una solución arbitraria de esta ecuación que satisface la condición $|C - C_0| < \delta = \varepsilon$. Entonces para $a < 0$

tenemos

$$|x(t)-x_0(t)| = |Ce^{-|a|(t-t_0)} - C_0 e^{-|a|(t-t_0)}| = \\ = e^{-|a|(t-t_0)}|C-C_0| < \varepsilon,$$

de donde

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)-x_0(t)| = |C-C_0| \lim_{t\to\infty} e^{-|a|(t-t_0)} = 0,$$

es decir, la solución es asintóticamente estable.

Para $a > 0$

$$|x(t)-x_0(t)| = e^{|a|(t-t_0)}|C-C_0|$$

puede ser un número tan grande como se quiere para t suficientemente grandes. Esto significa, que para $a > 0$ la solución es inestable.

Si $a = 0$ la solución tiene la forma $x_0(t) = C_0$.

Para toda solución $x(t) = C$ con la condición $|C - C_0| < \delta = \varepsilon$ tenemos

$$|x(t) - x_0(t)| = |C - C_0| < \varepsilon.$$

Pero

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)-x_0(t)| = |C-C_0| \neq 0,$$

y por eso la solución es estable, pero no es asintóticamente estable.▶

La investigación de la solución $X_0(t)$ del sistema (1) a la estabilidad, puede ser reducida a la investigación de la estabilidad de la solución trivial (nula), o sea, del *punto de reposo* de cierto sistema análogo al sistema (1).

Investíguense a la estabilidad las soluciones de las ecuaciones y de los sistemas de ecuaciones siguientes:

4.1. $\dot{x} = t(x - 1)$, $x(0) = 1$.

4.2. $\dot{x} = t - 1$, $x(0) = -1$.

4.3. $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = x - y$; $x(0) = y(0) = 0$.

4.4. $\dot{x} = -2x - 3y$, $\dot{y} = x + y$; $x(0) = y(0) = 0$.

4.5. $\dot{x} = \alpha x - y$, $\dot{y} = \alpha y - z$, $\dot{z} = \alpha z - x$; $x = (0) = y(0) = z(0) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.6*. Escríbase el sistema de ecuaciones diferenciales, si la investigación del punto de reposo de éste a la estabilidad es equivalente a la investigación a la estabilidad de la solución $X_0(t)$ del sistema.

4.7. Formúlense las definiciones de la estabilidad, de la estabilidad asintótica y de la inestabilidad para el punto pe reposo del sistema de ecuaciones diferenciales.

Tabla 4.1

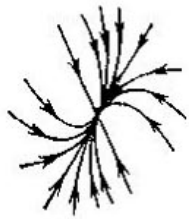
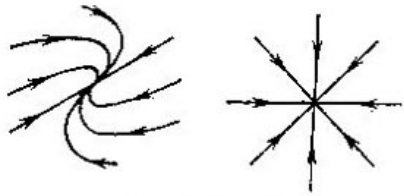
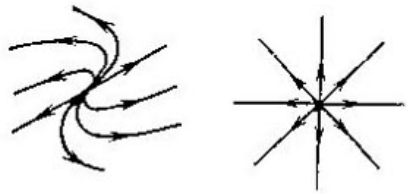
Raíces λ_1, λ_2		Carácter del punto de reposo	Estabilidad del punto de reposo
Reales: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	*Nudo estable* 	Asintóticamente estable
	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$	*Nudo inestable*	Inestable
	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	*Ensilladura*	Inestable
Complejas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha < 0$, $\beta \neq 0$	*Foco estable*	Asintóticamente estable
	$\alpha > 0$, $\beta \neq 0$	*Foco inestable*	Inestable
	$\alpha = 0$, $\beta \neq 0$	*Centro*	Estable

Tabla 4.1 (continuación)

Raíces λ_1, λ_2		Carácter del punto de reposo	Estabilidad del punto de reposo
Real, de multiplicidad 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\lambda < 0$	*Nudo estable* 	Asintóticamente estable
	$\lambda > 0$	*Nudo inestable* 	Inestable

4.8. Demuéstrese que si una solución cualquiera del sistema lineal de ecuaciones diferenciales es estable según Liapunov entonces son estables todas las soluciones de este sistema.

2. Tipos elementales de los puntos de reposo. Para investigar a la estabilidad el punto de reposo del sistema de dos ecuaciones diferenciales homogéneas lineales con coeficientes constantes

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4}$$

es necesario componer la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \Delta = 0$$

y hallar sus raíces λ_1 y λ_2. En la tabla 4.1 se da la clasificación de puntos de reposo del sistema (4) en dependencia de las raíces λ_1, λ_2 de la ecuación característica.

EJEMPLO 2. Determínese el carácter e investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + \alpha y, \\ \dot{y} &= x + y \end{aligned}$$

en dependencia del parámetro α.

◀ La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & \alpha \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - (\alpha + 2) = 0$$

tiene las raíces $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9+4\alpha}$.

Investigando el comportamiento de las raíces λ_1, λ_2 en dependencia del parámetro α y empleando los datos de la tabla 4.1, obtenemos:

un foco estable, si $\alpha < -9/4$ (las raíces son complejas, $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$);

un nudo estable, si $\alpha = -9/4$ (las raíces son reales e iguales);

un nudo estable, si $-9/4 < \alpha < -2$ (las raíces son reales y negativas);

una ensilladura y el punto de reposo es inestable, si $-2 < \alpha$ (las raíces son reales y de signos diferentes). ▶

Determínese el carácter de los puntos de reposo de los sistemas siguientes:

4.9. $\dot{x} = x + 2y$, $\dot{y} = -3x + y$.

4.10. $\dot{x} = -2x + \frac{1}{3}y$, $\dot{y} = -2x + \frac{1}{2}y$.

4.11. $\dot{x} = -x + 3y$, $\dot{y} = -x + 2y$.

4.12. $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x - 2y$.

4.13. $\dot{x} = -6x - 5y$, $\dot{y} = -2x - 5y$.

4.14. $\dot{x} = -x + 2y$, $\dot{y} = -2x - 5y$.

Determínese para qué valores del parámetro α el punto de reposo del sistema es estable.

4.15. $\dot{x} = \alpha x - y$, $\dot{y} = x + 2y$.

4.16. $\dot{x} = -3x + \alpha y$, $\dot{y} = -\alpha x + y$.

4.17. Investíguese a la estabilidad la ecuación de oscilaciones elásticas

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta^2 x = 0$$

tomando en consideración el rozamiento y la resistencia del medio (para $\alpha > 0$).

4.18*. Sea dado el sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demuéstrese que si todas las raíces de la ecuación característica de este sistema tienen parte real negativa, entonces el punto de reposo del sistema es asintóticamente estable. Si por lo menos una de las raíces de la ecuación característica tiene una parte real positiva, entonces el punto de reposo es inestable.

Empleando el resultado del problema 4.18 investíguese a la estabilidad el punto de reposo de cada uno de los sistemas siguientes:

4.19. $\dot{x} = 2x,\ \dot{y} = 3x + 2y,\ \dot{z} = -x - y - z.$

4.20. $\dot{x} = -2x - y,\ \dot{y} = x - 2y,\ \dot{z} = x + 3y - z.$

3. **Método de funciones de Liapunov.** Este método aplicado al sistema autónomo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{5}$$

donde $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, consiste en la investigación directa de la estabilidad de su punto de reposo con ayuda de *la función de Liapunov* $V(x_1, \ldots, x_n)$ escogida de modo adecuado.

Son válidos los siguientes teoremas de Liapunov:

TEOREMA 1 (sobre la estabilidad). *Si existe una función diferenciable* $V(x_1, \ldots, x_n)$ *que satisface en el entorno del origen de coordenadas las siguientes condiciones:*

a) $V(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, además $V = 0$ *sólo para* $x_1 = \ldots = x_n = 0$;

b) $\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0,$

entonces el punto de reposo del sistema (5) *es estable.*

TEOREMA 2 (sobre la estabilidad asintótica). *Si existe una función diferenciable* $V(x_1, \ldots, x_n)$ *que satisface en el entorno del origen de coordenadas las siguientes condiciones:*

a) $V(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, *además* $V = 0$ *sólo cuando* $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

b) $\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$, además $\dfrac{dV}{dt} = 0$ *sólo para* $x_1 = \ldots = x_n = 0$, *entonces el punto de reposo del sistema* (5) *es asintóticamente estable.*

TEOREMA 3. (Sobre la inestabilidad). *Si existe una función diferenciable* $V(x_1, \ldots, x_n)$ *que satisface en el entorno del origen de coordenadas las condiciones:*

a) $V(0, \ldots, 0) = 0$ *y tan cerca del origen de coordenadas como se quiera, hay puntos en los cuales* $V(x_1, \ldots, x_n) > 0$;

b) $\dfrac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, *además* $\dfrac{dV}{dt} = 0$ *sólo para* $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

entonces el punto de reposo del sistema (5) *es inestable.*

EJEMPLO 3. Con ayuda de la función de Liapunov investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = -x + y,$$

$$\dot{y} = -2y^3 - x.$$

◀ En calidad de función de Liapunov tomemos $V = x^2 + y^2$. Entonces

$$\frac{dV}{dt} = 2x(-x + y) + 2y(-2y^3 - x) = -2(x^2 + 2y^4),$$

y la función V junto con $\dfrac{dV}{dt}$ satisfacen las condiciones del teorema 2. Lo que quiere decir que el punto de reposo del sistema es asintóticamente estable. ▶

EJEMPLO 4. Investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = x(2 + \cos x),$$

$$\dot{y} = -y.$$

◀ Tomenos la función $V(x, y) = x^2 - y^2$. En este caso $\dfrac{dV}{dt} = 2x^2(2 + \cos x) + 2y^2 = 2(2x^2 + y^2 + x^2 \cos x) = 2\left(x^2 + 2x^2 \cos^2 \dfrac{x}{2} + y^2\right) > 0$ en todos los puntos, excepto en el origen de coordenadas. Además, tan cerca del origen de coordenadas como se quiera existen tales puntos, en los cuales $V > 0$ (por ejemplo, a lo largo de la recta $y = 0$ $V = x^2 > 0$). Por consiguiente, quedan cumplidas las condiciones del teorema 3 y el punto de reposo es inestable. ▶

No existe el método general de construcción de la función de Liapunov. En los casos elementales es conveniente buscarla en la forma: $V = ax^2 + by^2$, $V = ax^4 + by^4$, $V = ax^2 + by^4$, escogiendo de modo adecuado las constantes $a > 0$ y $b > 0$.

EJEMPLO 5. Investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = -x + \frac{3}{2}y + 3xy^3,$$

$$\dot{y} = -x - \frac{1}{2}y - 2x^2y^2.$$

◀ Buscaremos la función de Liapunov en la forma de $V = ax^2 + by^2$, $a > 0$, $b > 0$. Entonces tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = 2ax\left(-x + \frac{3}{2}y + 3xy^3\right) + 2by\left(-x - \frac{y}{3} - 2x^2y^2\right) =$$

$$= -\left(2ax^2 + \frac{2}{3}by^2\right) + (xy + 2x^2y^3)(3 - 2b).$$

Poniendo $b = \frac{3}{2}a$ obtendremos que $\frac{dV}{dt} = -a(2x^2 + y^2) \leqslant 0$ para cualquier $a > 0$. Del teorema 2 se deduce que el punto de reposo del sistema es asintóticamente estable. ▶

Investíguense a la estabilidad los puntos de reposo de los sistemas siguientes:

4.21. $\dot{x} = -x - y - x^3 - y^2$, $\dot{y} = x - y + xy$.

4.22. $\dot{x} = y + x^3$, $\dot{y} = -x + y^3$.

4.23. $\dot{x} = xy^4$, $\dot{y} = -x^4y$.

4.24. $\dot{x} = -y + x^5$, $\dot{y} = x + y^5$.

4.25. $\dot{x} = y + x^2y^2 - \frac{1}{4}x^5$, $\dot{y} = -2x - 2x^3y - \frac{1}{2}y^3$.

4.26. $\dot{x} = -2x + 4xy^2$, $\dot{y} = y + 2x^2y$.

4. Estabilidad según la primera aproximación. Supongamos que las partes derechas del sistema (5), es decir las funciones $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, son diferenciables suficiente número de veces en el origen de coordenadas. Desarrollémoslas según la fórmula de Taylor en el entorno del origen de coordenadas:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + F_i(x_1, \ldots, x_n),$$

donde $a_{ij} = \frac{\partial f_i(0, \ldots, 0)}{\partial x_j}$ y F_i son términos de segundo orden de infinitud respecto de $x_1, \ldots, x_n$. Entonces el sistema inicial (5) puede ser escrito en la forma

$$\dot{x}_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + F_1(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{x}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j + F_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Analicemos el sistema

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, x_n, \tag{6}$$

llamado sistema de ecuaciones de *primera aproximación* para el sistema (5).

Es justa la siguiente afirmación: si todas las raíces de la ecuación característica del sistema (6) tienen partes reales negativas, entonces el punto de reposo del sistema (6), así como del sistema inicial (5) es asintóticamente estable; si por lo menos una de las raíces de la ecuación característica del sistema (6) tiene parte real positiva, entonces el punto de reposo del sistema (6) (y del sistema (5)) es inestable.

Se dice que en este caso es posible investigar el sistema (5) a la *estabilidad según la primera aproximación*. En los demás casos es imposible realizar, hablando en general, tal investigación ya que empiezan a influir los términos de segundo orden de infinitud.

EJEMPLO 6. Investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = 2x + 8 \operatorname{sen} y,$$
$$\dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y.$$

◀ Desarrollando las funciones sen y, cos y, e^x según la fórmula de Taylor y separando los términos de primer orden de infinitud podemos reescribir el sistema inicial en la forma de

$$\dot{x} = 2x + 8y + F_1(x, y),$$
$$\dot{y} = -x - 3y + F_2(x, y),$$

donde F_1, F_2 son términos de segundo orden de infinitud respecto de x e y. El sistema correspondiente de ecuaciones de primera aproximación de la forma (6) se escribe del modo siguiente:

$$\dot{x} = 2x + 8y,$$
$$\dot{y} = -x - 3y.$$

Las raíces de su ecuación característica $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ tienen partes reales negativas. Por consiguiente, el punto de reposo de este sistema, así como del inicial, es estable. ▶

Investíguense a la estabilidad según la primera aproximación los puntos de reposo de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

4.27. $\dot{x} = \dfrac{1}{4}(e^x - 1) - 9y$, $\dot{y} = \dfrac{1}{5}x - \operatorname{sen} y$.

4.28. $\dot{x} = 5x + y \cos y$, $\dot{y} = 3x + 2y - y^3 e^y$.

4.29. $\dot{x} = 7x + 2 \operatorname{sen} y$, $\dot{y} = e^x - 3y - 1$.

4.30. $\dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2y$, $\dot{y} = -y - 2x$.

4.31. $\dot{x} = \ln(4y + e^{-3x})$, $\dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}$.

4.32. $\dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x$, $\dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y$.

4.33. Demuéstrese que es imposible investigar la estabilidad según la primera aproximación del punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = -4y - x^3, \quad \dot{y} = 3x - y^3.$$

Realícese la investigación aplicando el método de funciones de Liapunov.

§ 5. Integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Problema de Cauchy. El problema de hallar la solución particular $y = y(x)$ ($y(x_0) = y_0$) de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, llamado problema de Cauchy, puede ser resuelto aproximadamente valiéndose de los métodos numéricos.

MÉTODO DE EULER. Los valores de la función buscada $y = y(x)$ en el segmento $[x_0, X]$ se determinan por la fórmula

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \tag{1}$$

donde $y_k = y(x_k)$, $x_{k+1} = x_k + h$ ($x_n = X$), $k = 0, 1, \ldots, n-1$, y $h = \frac{X - x_0}{n}$ (paso). Basándose en el error absoluto límite dado ε se establece el paso inicial de cálculos de h, con ayuda de la desigualdad $h^2 < \varepsilon$.

MÉTODO DE EULER CON ITERACIONES. Para calcular los valores de la función $y = y(x)$ se emplea la fórmula

$$y_{k+1}^{(m)} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_k, y_{k+1}^{(m-1)})\right). \tag{2}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1, \; m = 1, 2, \ldots, M,$$

donde $y_{k+1}^{(0)} = y_{k+1}$ se calcula por la fórmula (1). Para cada valor de k los cálculos se continúan hasta cumplir la desigualdad

$$|y_{k+1}^{(m)} - y_{k+1}^{(m-1)}| < \varepsilon \tag{3}$$

donde ε es el error absoluto límite dado. Luego, poniendo $y_{k+1} = y_{k+1}^{(m)}$ se pasa a la determinación del valor siguiente y_{k+2} de la función buscada. Si la desigualdad (3) no se obtiene, disminuyen el paso h y realizan todos los cálculos de nuevo. Basándose en el error absoluto límite dado ε se establece el paso inicial de cálculos de h, con ayuda

de la desigualdad $h^3 < \varepsilon$. La estimación a posteriori de exactitud se hace con ayuda de la regla de Runge—Romberg (véase más abajo).

EJEMPLO 1. Aplicando el método de Euler con iteraciones, resuélvase el problema de Cauchy en el segmento $[0, 1]$ para la ecuación $y' = 2x - y$, con la condición inicial $y = -1$ para $x = 0$. Hay que escoger el paso de tal modo que se satisfaga la desigualdad $h^3 < 0{,}01$.

◀ Partiendo de la desigualdad $h^3 < 0{,}01$ escojamos el paso de cálculos de $h = 0{,}2$. Entonces $n = \dfrac{1-0}{0{,}2} = 5$. Calculando con un solo signo de reserva hallamos por la fórmula (1) el valor de

$$y_1^{(0)} = -1 + 0{,}2\,(2\cdot 0 - (-1)) = -0{,}800.$$

Introduzcamos la elaboración iterativa de y_1 según la fórmula (2):

$$y_1^{(1)} = -1 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0 - (-1) + 2\cdot 0{,}2 - (-0{,}800)) = -0{,}780,$$

$$y_1^{(2)} = -1 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0 - (-1) + 2\cdot 0{,}2 - (-0{,}780)) = -0{,}782,$$

$$y_1^{(3)} = -1 + \frac{0{,}2}{1}\,(2\cdot 0 - (-1) + 2\cdot 0{,}2 - (-0{,}782)) = -0{,}782.$$

Obtenemos $y_1 = -0{,}782$.

Calculamos por la fórmula (1) el valor de $y_2^{(0)}$:

$$y_2^{(0)} = -0{,}782 + 0{,}2\,(2\cdot 0{,}2 - (-0{,}782)) = -0{,}546.$$

Efectuamos la elaboración iterativa:

$$y_2^{(1)} = -0{,}782 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0{,}2 - (-0{,}782) + 2\cdot 0{,}4 - (-0{,}546)) = -0{,}529,$$

$$y_2^{(2)} = -0{,}782 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0{,}2 - (-0{,}782) + 2\cdot 0{,}4 - (-0{,}529)) = -0{,}531.$$

$$y_2^{(3)} = -0{,}782 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0{,}2 - (-0{,}782) + 2\cdot 0{,}4 - (-0{,}531)) = -0{,}531.$$

Obtenemos $y_2 = -0{,}531$.

Calculando de modo análogo hallamos $y_3 = -0{,}253$, $y_4 = 0{,}047$, $y_5 = 0{,}366$. Redondeando hasta centésimas obtenemos $y_0 = -1{,}00$, $y_1 = -0{,}78$, $y_2 = -0{,}53$, $y_3 = -0{,}25$, $y_4 = 0{,}05$, $y_5 = 0{,}37$. Los valores hallados de y_k coinciden con una exactitud de hasta 0,01 con los valores de la solución particular $y = e^{-x} + 2x - 2$ en los puntos correspondientes del segmento $[0, 1]$. ▶

MÉTODO DE RUNGE — KUTTA. Los valores de la función buscada $y = y(x)$ en el segmento $[x_0, X]$ se determinan sucesivamente según las fórmulas

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

donde

$$\Delta y_k = \frac{1}{6}(q_1^{(k)} + 2q_2^{(k)} + 2q_3^{(k)} + q_4^{(k)}),$$

$$q_1^{(k)} = h \cdot f(x_k, y_k),\ q_2^{(k)} = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{q_1^{(k)}}{2}\right),$$

$$q_3^{(k)} = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{q_2^{(k)}}{2}\right),\ q_4^{(k)} = h \cdot f(x_{k+1},$$

$$y_k + q_3^{(k)}),$$

$$x_{k+1} = x_k + h\ (x_n = X),\ h = \frac{X - x_0}{n}.$$

A partir del error absoluto límite dado ε se determina el paso inicial de cálculos de h, con ayuda de la desigualdad $h^4 < \varepsilon$. La estimación a posteriori de exactitud se realiza según la regla de Runge—Romberg.

REGLA DE RUNGE—ROMBERG. Sean $y_h^{(h)}$ e $y_h^{(2h)}$ los valores de la función buscada obtenidos por uno de los métodos anteriormente mencionados para los pasos de cálculos h y $2h$, respectivamente, y sea ε el error absoluto límite dado. Entonces se considera que está alcanzada la exactitud dada de cálculos, si se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{2^s - 1} \cdot |y_{2h}^{(h)} - y_h^{(2h)}| < \varepsilon \qquad (5)$$

para todos los h y cuando $s = 2, 3, 4$, respectivamente, para los métodos de Euler, de Euler con iteraciones y de Runge—Kutta. La solución del problema es la función $\{y_h^{(h)}\}$.

Aplicando la regla indicada se calculan sucesivamente los valores de la función buscada con el paso $2h$ y con el paso h y se comparan los resultados obtenidos por la fórmula (5). Los cálculos terminan cuando la desigualdad (5) se cumple para todos los h.

EJEMPLO 2. Aplicando el método Runge—Kutta resuélvase con una exactitud de hasta 0,001 el problema de Cauchy en el segmento $[0, 0{,}6]$ para la ecuación $y' = x + y$ con la condición inicial $y = 1$ para $x = 0$.

◀ Partiendo de la desigualdad $H^4 < 0{,}001$ escogemos el paso inicial de cálculos $H = 0{,}15$. Entonces $n = 4$. Calculando con un solo dígito de reserva encontramos y_1 según la fórmula (4):

$$y_1 = 1 + \Delta y_0 = 1 + \frac{1}{6}(q_1^{(0)} + 2q_2^{(0)} + 2q_3^{(0)} + q_4^{(0)}),$$

donde $q_1^{(0)} = 0{,}1500$, $q_2^{(0)} = 0{,}1725$, $q_3^{(0)} = 0{,}1742$, $q_4^{(0)} = 0{,}1986$. Tenemos:

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0{,}1500 + 2 \cdot 0{,}1725 + 2 \cdot 0{,}1742 + 0{,}1986) = 1{,}1737.$$

Luego,

$$y_2 = 1{,}1737 + \frac{1}{6}(q_1^{(1)} + 2q_2^{(1)} + 2q_3^{(1)} + q_4^{(1)}),$$

donde $q_1^{(1)} = 0{,}1986$, $q_2^{(1)} = 0{,}2247$ $q_3^{(1)} = 0{,}2267$, $q_4^{(1)} = 0{,}2551$. Por consiguiente,

$$y_2 = 1{,}1737 + \frac{1}{6}(0{,}1986 + 2 \cdot 0{,}2247 + 2 \cdot 0{,}2267 + 0{,}2551) = 1{,}3998.$$

De modo análogo calculamos $y_3 = 1{,}6867$ e $y_4 = 2{,}0443$.

Disminuimos el paso en dos veces, es decir, escogemos $h = 0{,}075$, ahora $n = 8$. Encontramos $y_1^{(h)}$ por las fórmulas (4):

$$y_1^{(h)} = 1 + \Delta y_0 = 1 + \frac{1}{6}(\widetilde{q_1^{(0)}} + 2\widetilde{q_2^{(0)}} + 2\widetilde{q_3^{(0)}} + \widetilde{q_4^{(0)}}) =$$

$$= 1 + \frac{1}{6}(0{,}075 + 2 \cdot 0{,}0806 + 2 \cdot 0{,}0808 + 0{,}0867) = 1{,}0808.$$

De modo análogo encontramos los demás valores de $y_k^{(h)}$.

Ponemos los resultados en la tabla:

$y_k^{(2h)}$	$y_k^{(h)}$	$y_k^{(2h)} - y_k^{(h)}$
$y_0^{(2h)} = 1$	$y_0^{(h)} = 1$	0
	$y_1^{(h)} = 1{,}0808$	
$y_1^{(2h)} = 1{,}1737$	$y_2^{(h)} = 1{,}1737$	0
	$y_3^{(h)} = 1{,}2796$	
$y_2^{(2h)} = 1{,}3998$	$y_4^{(h)} = 1{,}3997$	0,0001
	$y_5^{(h)} = 1{,}5350$	
$y_3^{(2h)} = 1{,}6867$	$y_6^{(h)} = 1{,}6866$	0,0001
	$y_7^{(h)} = 1{,}8559$	
$y_4^{(2h)} = 2{,}0443$	$y_8^{(h)} = 2{,}0442$	0,0001

Es evidente que el primer miembro de la desigualdad (5) en este caso no supera a 0,00002. Por eso, $y_k^{(h)}$ con una exactitud de hasta 0,00002 representa la función que se busca, es decir, todos los dígitos hallados son válidos. ▶

MÉTODO DE MILNE. Los valores de la función buscada $y = y(x)$ en el segmento $[x_0, X]$ se hallan sucesivamente por dos fórmulas:

$$\tilde{y}_k = y_{k-4} + \frac{4h}{3}(2 \cdot f(x_{k-3}, y_{k-3}) - f(x_{k-2}, y_{k-2}) + 2 \cdot f(x_{k-1}, y_{k-1})), \quad (6)$$

$$y_k = y_{k-2} + \frac{h}{3}(f(x_{k-2}, y_{k-2}) + 4f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, \tilde{y}_k)),$$

$$k = 4, 5, \ldots, n, \quad h = \frac{X - x_0}{n}, \quad x_k = x_{k-1} + h.$$

Los cuatro primeros valores de y_0, y_1, y_2, y_3 deben ser dados y para esto previamente se determinan y_1, y_2, y_3 por cualquier otro método. El error absoluto límite ε del valor y_k de la solución aproximada se determina por la igualdad

$$\varepsilon = \frac{1}{29}|\tilde{y}_k - y_k|. \quad (7)$$

EJEMPLO 3. Empleando los valores de y_1, y_2, y_3 que fueron obtenidos en el ejemplo 2 por el método de Runge—Kutta, hállese el valor de y_4 mediante el método de Milne.

◀ Tenemos $y_0 = 1{,}0000$; $y_1 = 1{,}0808$, $y_2 = 1{,}1737$, $y_3 = 1{,}2796$ y $h = 0{,}075$. Calculando $\tilde{y}_4$ e y_4 según las fórmulas (6), obtenemos:

$$\tilde{y}_4 = 1 + \frac{4 \cdot 0{,}075}{3}(2(0{,}075 + 1{,}0808) - (0{,}15 + 1{,}1737) + 2(0{,}225 + 1{,}2796)) = 1{,}3997,$$

$$y_4 = 1{,}1737 + \frac{0{,}075}{3}((0{,}15 + 1{,}1737) + 4(0{,}225 + 1{,}2796) + (0{,}3 + 1{,}3997)) = 1{,}3997.$$

Ya que $\tilde{y}_4 - y_4 = 0$ de la fórmula (7) concluimos que todos los dígitos de los valores de y_4 son válidos. ▶

En los problemas 5.1—5.19 se exige hallar con una exactitud de hasta 0,0001, la solución de la ecuación diferencial de primer orden para las condiciones iniciales indicadas en el segmento dado:

a) mediante el método de Euler con iteraciones,
b) mediante el método de Runge — Kutta,
c) mediante el método de Milne.

5.1. $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $y(0) = 1$, $[0, 1]$.

5.2. $y' - 2y = 3e^x$, $y(0{,}3) = 1{,}415$, $[0{,}3, 0{,}6]$.

5.3. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $[0, 0{,}3]$.

5.4. $y' = y^2 - x^2$, $y(1) = 1$, [1, 2].
5.5. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0{,}27$, [0, 1].
5.6. $y' + xy(1 - y^2) = 0$, $y(0) = 0{,}5$, [0, 1].
5.7. $y' = x^2 - xy + y^2$, $y(0) = 0{,}1$, [0, 1].
5.8. $y' = (2y - x)/y$, $y(1) = 2$, [1, 2].
5.9. $y' = x^2 + xy + y^2 + 1$, $y(0) = 0$, [0, 1].
5.10. $y' + y = x^3$, $y(1) = -1$, [1, 2].
5.11. $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$, [0, 0,1].
5.12. $y' = 2xy + x^2$, $y(0) = 0$, [0, 0,5].
5.13. $y' = x + \operatorname{sen} \frac{y}{2}$, $y(0) = 1$, [0, 2].
5.14. $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$, [0, 0,4].
5.15. $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$, [0, 0,1].
5.16. $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = 0{,}5$, [0, 0,5].
5.17. $y' = xy^3 - y$, $y(0) = 1$, [0, 1].
5.18. $y' = y^2 \cdot e^x - 2y$, $y(0) = 1$, [0, 1].
5.19. $y' = \frac{1}{y^2 - x}$, $y(1) = 0$, [1, 2].

En los problemas 5.20—5.22 fórmense en Fortran los subprogramas de la solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ mediante los métodos indicados.

5.20. Método de Euler con iteraciones. Los parámetros son F, X0, Y0, H, N, Y, donde F es el nombre del subprograma-función para calcular los valores de la función $f(x, y)$, X0 es el valor inicial del argumento, Y0 es el valor inicial de la función, H es el paso de cálculos, N es el número de valores de la función buscada $y = y(x)$, Y es la tabla de dimensión N de los valores de la función $y = y(x)$.

5.21. Método de Runge — Kutta. Los parámetros son F, X0, Y0, H, N, Y, EPS, donde H es el paso inicial de cálculos, EPS es el error absoluto límite dado, parámetro de entrada; los demás parámetros son los mismos que en el problema 5.20.

5.22. Método de Milne. Los parámetros son F, X0, H, N, Y, EPS, donde EPS es el error absoluto límite obtenido durante los cálculos, parámetro de salida, N es el número de valores de la función buscada, incluyendo el inicial. Los demás parámetros son los mismos que en el problema 5.20. Los cuatro primeros elementos de la tabla Y deben ser determinados antes de recurrir al subprograma.

En los problemas 5.23—5.25 compóngase en Fortran el programa de la solución de uno de los problemas 5.1—5.19, empleando con este fin uno de los subprogramas indicados.

5.23. Subprograma obtenido en el problema 5.20.
5.24. Subprograma obtenido en el problema 5.21.
5.25. Subprograma obtenido en el problema 5.22.

Los métodos considerados más arriba pueden ser empleados en la solución del problema de Cauchy para el sistema normal de dos ecuaciones diferenciales de primer orden y para la ecuación diferencial de segundo orden.

EJEMPLO 4. Aplicando el método de Euler con iteraciones resuélvase el problema de Cauchy en el segmento $[3, 4]$ con una exactitud de hasta 0,01 para la ecuación

$$y'' = -\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} + 1,$$

cuando las condiciones iniciales son $y(3) = 6$, $y'(3) = 3$.

◀ Partiendo de la desigualdad $h^3 < 0{,}01$ escojamos el paso de cálculos de $h = 0{,}2$. Entonces $n = \dfrac{4-3}{0{,}2} = 5$.

Reducimos la ecuación de segundo orden al sistema de dos ecuaciones de primer orden, introduciendo una nueva función $p = y'$:

$$p' = -\frac{p}{x} + \frac{y^2}{x} + 1 = f(x, y, p),$$
$$y' = p = \varphi(x, y, p).$$

Las condiciones iniciales para el sistema dado son: $y = 6$, $p = 3$ para $x = 3$.

Conservando un signo de reserva calculemos los valores de las funciones $p = p(x)$ e $y = y(x)$ en los puntos $x_1 = 3{,}2$, $x_2 = 3{,}4$, $x_3 = 3{,}6$, $x_4 = 3{,}8$, $x_5 = 4$, según las fórmulas (1) y (2).

Para $x_1 = 3{,}2$ tenemos:

$$p_1^{(0)} = p_0 + h \cdot f(x_0, y_0, p_0) = 3 + 0{,}2\left(-\frac{3}{3} + \frac{6}{3^2} + 1\right) = 3{,}133,$$

$$y_1^{(0)} = y_0 + h \cdot \varphi(x_0, y_0, p_0) = y_0 + h \cdot p_0 = 6 + 0{,}2 \cdot 3 = 6{,}600,$$

$$p_1^{(1)} = p_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0, p_0) + f(x_1, y_1^{(0)}, p_1^{(0)})) =$$

$$= 3 + 0{,}1\left(\left(-\frac{3}{3} + \frac{6}{3^2} + 1\right) + \left(-\frac{3{,}133}{3{,}2} + \frac{6{,}600}{3{,}2^2} + 1\right)\right) = 3{,}133,$$

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}(\varphi(x_0, y_0, p_0) + \varphi(x_1, y_1^{(0)}, p_1^{(0)})) =$$

$$= y_0 + \frac{h}{2}(p_0 + p_1^{(0)}) = 6 + 0{,}1(3 + 3{,}133) = 6{,}613.$$

Obtenemos los valores de $p_1 = 3{,}133$ e $y_1 = 6{,}613$.

Para $x_2 = 3{,}4$ tenemos:

$$p_2^{(0)} = p_1 + h \cdot f(x_1, y_1, p_1) = 3{,}133 + 0{,}2\left(-\frac{3{,}133}{3{,}2} + \frac{6{,}613}{3{,}2^2} + 1\right) = 3{,}266,$$

$$y_2^{(0)} = y_1 + h \cdot \varphi(x_1, y_1, p_1) = y_1 + h \cdot p_1 = 6{,}613 + 0{,}2 \cdot 3{,}133 = 7{,}240,$$

$$p_2^{(1)} = p_1 + \frac{h}{2}\left(f(x_1, y_1, p_1) + f(x_2, y_2^{(0)}, p_2^{(0)})\right) =$$

$$= 3{,}133 + 0{,}1\left(\left(-\frac{3{,}133}{3{,}2} + \frac{6{,}613}{3{,}2^2} + 1\right) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{3{,}266}{3{,}4} + \frac{7{,}240}{3{,}4^2} + 1\right)\right) = 3{,}266,$$

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}\left(\varphi(x_1, y_1, p_1) + \varphi(x_2, y_2^{(0)}, p_2^{(1)})\right) =$$

$$= y_1 + \frac{h}{2}(p_1 + p_1^{(0)}) = 6{,}613 + 0{,}1\,(3{,}133 + 3{,}266) = 7{,}253.$$

De aquí obtenemos los valores de $p_2 = 3{,}266$ e $y_2 = 7{,}253$.

Realizando cálculos análogos para $x_3 = 3{,}6$, $x_4 = 3{,}8$ y $x_5 = 4$ hallamos

$$p_3 = 3{,}399, \quad y_3 = 7{,}920,$$
$$p_4 = 3{,}532, \quad y_4 = 8{,}613,$$
$$p_5 = 3{,}665, \quad y_5 = 9{,}333.$$

Redondeando hasta centésimas obtenemos la respuesta: $y_0 = 6{,}00$, $y_1 = 6{,}61$, $y_2 = 7{,}25$, $y_3 = 7{,}92$, $y_4 = 8{,}61$, $y_5 = 9{,}33$. ▶

En los problemas 5.26—5.31 se exige hallar la solución del sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden o la solución de la ecuación diferencial de segundo orden, con exactitud de hasta 0,001 para las condiciones iniciales indicadas en el segmento dado:

5.26. $y' = \frac{z}{x}$, $z' = -\frac{2z^2}{x(y-1)} + \frac{z}{x}$, $y(1) = 0$, $z(1) = \frac{1}{3}$, $[1, 2]$.

5.27. $y' = (z - y)\,x$, $z' = (z + y)\,x$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$, $[0, 1]$.

5.28. $y' = \cos(y + 2z) + 2$, $z' = \frac{2}{x + 2y^2} + x + 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0{,}05$, $[0, 0{,}3]$.

5.29. $y' = e^{-(y^2-z^2)} + 2x$, $z' = 2y^2 + z$, $y(0) = 0{,}5$, $z(0) = 1$, $[0, 0{,}3]$.

5.30. $y'' - y = e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0{,}5$, $[0, 1]$.

5.31. $y'' - 2y' = x^2 - 1$, $y(1) = -\frac{1}{6}$, $y'(1) = -\frac{3}{4}$, $[1, 2]$.

5.32. Fórmese en Fortran aplicando el método de Runge—Kutta el subprograma de la solución del sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y' = f(x, y, z),$$
$$z' = \varphi(x, y, z)$$

con las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$, en el segmento $[x_0, X]$. Los parámetros son F, F1, X0, Y0, H, N, Y, Z, EPS, donde F y F1 son los nombres de los subprogramas-funciones para calcular los valores de las funciones $f(x, y, z)$ y $\varphi(x, y, z)$, X0 es el valor inicial del argumento $x = x_0$, Y0 es el valor inicial de la función, H es el paso inicial de cálculos, N es el número de valores de las funciones buscadas $y = y(x)$ y $z = z(x)$, Y y Z son tablas de dimensión N de los valores de las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$, EPS es el error absoluto límite dado.

5.33. Utilizando el subprograma obtenido al resolver el problema 5.32, compóngase en Fortran el programa de la solución de uno de los problemas 5.26—5.31.

2. Problema de contorno para la ecuación lineal. El problema de contorno para la ecuación diferencial lineal

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x),$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ son ciertas funciones continuas en el segmento $[a, b]$, consiste en hallar su solución $y = y(x)$ que satisfaga las condiciones de frontera

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A,$$
$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B,$$

donde α_0, α_1, β_0, β_1, A, B son constantes y $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$. Este problema puede ser resuelto numéricamente por el método de diferencias finitas; aplicándolo, los valores de las

funciones $y = y(x)$ se hallan a partir del sistema de ecuaciones lineales de $(n+1)$-ésimo orden del tipo:

$$\frac{y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k}{h^2}+p(x_k)\frac{y_{k+1}-y_k}{h}+q(x_k)y_k=f(x_k), \qquad (8)$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-2,$$

$$\alpha_0 y_0+\alpha_1\frac{y_1-y_0}{h}=A,$$

$$\left(h=\frac{b-a}{n}\right),$$

$$\beta_0 y_n+\beta_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=B$$

con $n+1$ incógnitas $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

EJEMPLO 5. Resuélvase el problema de contorno para la ecuación diferencial

$$y''+x^2y+2=0$$

con las condiciones de frontera $y(-1)=0$, $y(1)=0$ en el segmento $[-1, 1]$ mediante el método de diferencias finitas, partiendo este segmento en cuatro partes iguales.

◀ Tenemos: $n=4$, $h=0{,}5$, $y_0=0$, $y_4=0$. Por consiguiente, se exige calcular tres valores $y_1=y(-0{,}5)$, $y_2=y(0)$, $y_3=y(0{,}5)$. Formemos el sistema (8) poniendo por turno $k=0, 1, 2$:

$k=0$:

$$\frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}+x_1^2y_1+2=0,\ \text{ó}\ 4(y_2-2y_1+y_0)+\frac{1}{4}y_1=-2;$$

$k=1$:

$$\frac{y_3-2y_2-y_1}{h^2}+x_2^2y_2+2=0,\ \text{ó}\ 4(y_3-2y_2+y_1)=-2;$$

$k=2$:

$$\frac{y_4-2y_3+y_2}{h^2}+x_3^2y_3+2=0,\ \text{ó}\ 4(y_4-2y_3+y_2)+\frac{1}{4}y_3=-2.$$

Añadiendo las condiciones de frontera obtenemos el siguiente sistema de cinco ecuaciones respecto a cinco incógnitas y_0, y_1, y_2, y_3, y_4:

$$\begin{aligned}
16y_0-31y_1+16y_2 &= -8,\\
2y_1+4y_2+2y_3 &= -1,\\
16y_2-31y_3+16y_4 &= -8,\\
y_0 &= 0,\\
y_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema hallamos $y_0=0$, $y_1=0{,}8$, $y_2=1{,}05$, $y_3=0{,}8$, $y_4=0$. ▶

En los problemas 5.34—5.39 se exige hallar la solución de la ecuación diferencial de segundo orden con las condiciones de frontera indicadas, aplicando el método de diferencias finitas y dividiendo el segmento dado en n partes iguales.

5.34. $x^2y'' - xy' = 3x^3$; $y(1) = 2$, $y(2) = 9$, $[1, 2]$, $n = 4$.

5.35. $x^2y'' + xy' - y = x^2$; $y(1) = 1{,}333$, $y'(3) = 3$, $[1, 3]$, $n = 7$.

5.36. $y'' + xy' + y = 2x$; $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, $[0, 1]$, $n = 10$.

5.37. $y'' + y \operatorname{ch} x = 0$; $y(0) = 0$, $y(2, 2) = 1$, $[0, 2. 2]$, $n = 11$.

5.38. $y'' + (x - 1)y' + 3{,}125y = 4x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1{,}368$, $[0, 1]$, $n = 10$.

5.39. $x^2y'' - 2y = 0$, $y(1) - 2y'(1) = 0$, $y(2) = 4{,}5$, $[1, 2]$, $n = 5$.

5.40. Empleando el subprograma de la solución del sistema lineal de las ecuaciones algebraicas obtenido en el problema 5.16 del cap. 4, fórmese en Fortran el programa de la solución de uno de los problemas 5.34—5.39.

RESPUESTAS

1.4. $y(\ln|1-x^2|+1)=1$. **1.5.** $y(1+x)=1$. **1.6.** $y=2-3\cos x$. **1.7.** $f(x, y)=0$, para $\frac{\partial f}{\partial x}<0$ tenemos máx, para $\frac{\partial f}{\partial x}>0$ tenemos mín. **1.8.** $\frac{\partial f}{\partial x}+f(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}=0$, a) $y+x^3+3x^2-0$, b) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+4})-\ln 2$. **1.9.** $x^2+y=xy'$. **1.10.** $xy'+y=0$. **1.11.** $y'=y\operatorname{th} x$. **1.12.** $2xyy'=x^2+y^2$. **1.13.** $yy'=x$. **1.14.** $xy'+2y=0$. **1.15.** $y'=\frac{1}{4ky^2}$. **1.22.** $\operatorname{arctg} y-\operatorname{arcsen} x=C$; $x=\pm 1$. **1.23.** $e^x+e^{-y}=C$. **1.24.** $y\operatorname{sen} y+\cos y-x\cos x+\operatorname{sen} x=C$. **1.25.** $\operatorname{arctg} y+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=C$. **1.26.** $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$; $x=\pm 1$. **1.27.** $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$. **1.28.** $(1+e^x)^2\operatorname{tg} y=C$. **1.29.** $e^x-\frac{1}{2}e^{2y}-2\ln|1+y|-\frac{(y-1)^2}{2}=C$, $y=-1$. **1.30.** $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}-x=C$. **1.31.** $4x+2y+1=Ce^{2y}$. **1.32.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}$

$\frac{1}{2}(4x+y+1)-x=C$. **1.33.** $x^2-y^2=1$. **1.34.** $\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\ln\left|\frac{y}{x}\right|=1$. **1.35.** $y=\operatorname{sen} x$. **1.36.** $y=\pm x\sqrt{2\ln|x|+C}$. **1.37.** $y=2x(\operatorname{arctg} Cx+\pi n)$, $y=(2n-1)\pi x$, $n\in\mathbb{Z}$. **1.38.** $x^2-2xy-y^2=C$. **1.39.** $\operatorname{arcsen}\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2}-\ln|x|=C$, $y=\pm x$. **1.40.** $xe^{y/x}=C$, $x=C$. **1.41.** $x^2-xy+y^2+x-y=C$. **1.42.** $x+y-1=C(y+2)^2$, $y=-2$. **1.43.** $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$. **1.44.** $y=xe^{1-x}$. **1.45.** $\ln|y|+2\sqrt{\frac{x}{y}}=2$. **1.46.** $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$. **1.47.** $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$. **1.48.** $y=(x+C)(1+x^2)$. **1.49.** $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{5}e^{3x}$. **1.50.** $y=x\ln x+\frac{C}{x}$. **1.51.** $y=(x+1)^2(e^x+C)$. **1.52.** $x=Cy+\frac{1}{2}y^3$. ● Escríbase la ecuación en la forma de $\frac{dx}{dy}=\frac{x+y^3}{y}$; es lineal respecto a x y $\frac{dx}{dy}$. **1.53.** $x=\operatorname{arctg} y-1+Ce^{-\operatorname{arctg} y}$. **1.54.** $\operatorname{sen} y=Ce^{-x}+x-1$. ● Póngase $\operatorname{sen} y=z$. **1.55.** $y=\operatorname{sen} x$. **1.56.** $y=e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$. **1.57.** $x=y\ln y+\frac{1}{y}$. **1.58.** $y=e^{-2x^2}\left(C+\frac{1}{2}x^3\right)^2$. **1.59.** $y=\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2\cos x+C}}$, $y=0$. **1.60.** $x^2=Ce^{\operatorname{sen} y}-2(\operatorname{sen} y+1)$. ● Escríbase la ecuación en la forma de $\frac{dx}{dy}=\frac{x^2\cos y+\operatorname{sen} 2y}{2x}$. **1.61.** $y^3=1/(3-2e^{\cos x})$. **1.62.** $x^2=1/(y+3y^2)$. **1.63.** $x^2+xy+y^2=C$. **1.64.** $5x^2y-8xy+x+3y=C$. **1.65.** $x^2+ye^{x/y}=C$. **1.66.** $x^2\cos^2 y+y^2=C$. **1.67.** Todo el plano Oxy. **1.68.** $y\neq x$. **1.69.** $y\neq\frac{2n+1}{2}\pi$. **1.70.** $x>y^2$. **1.71.** $y=0$. **1.72.** $y=1$. **1.73.** $y=-x$. **1.74.** $y=x^2/4$. **1.75.** $x=2p+6p^2+C$, $y=p^2+4p^3$; $y=0$ (solución particular). **1.76.** $x=2\sqrt{p^2+1}-\ln(1+\sqrt{p^2+1})+\ln p+C$, $y=p\sqrt{1+p^2}$; $y=0$ (solución particular). **1.77.** $x=e^p+C$, $y=(p-1)e^p$. **1.78.** $y=Cx+\frac{1}{2}(C^2+x^2)$, $y=-x^2$ (solución particular). **1.79.** $x=p^3-p+2$, $y=\frac{3}{4}p^4-\frac{p^2}{2}+C$. **1.80.** $x=p\cos p$, $y=p^2\cos p-p\operatorname{sen} p-\cos p+C$. **1.81.** $x=2p-\ln p$, $y=p^2-p+C$. **1.82.** $x=Cy+C^2$, $x=-\frac{1}{4}y^2$ (solución particular). **1.83.** $y=\frac{1}{2}Cx^2+\frac{1}{2C}$, $y=\pm x$ (solución particular). **1.84.** $x=\frac{C}{p^2}-\frac{2}{p^3}$; $y=\frac{2C}{p}-\frac{3}{p^2}$. **1.85.** $x=-p-\frac{1}{2}+\frac{C}{(1-p)^2}$, $y=-\frac{1}{2}p^2+\frac{Cp^2}{(1-p)^2}$; $y=0$, $y=x+$

$+1$ (solución particular). **1.86.** $x=Cp-\ln p-2$, $y=\frac{1}{2}Cp^2-p$. **1.87.** $y=Cx-\frac{1}{C}$, $y^2=-4x$ (solución particular). **1.88.** $y=Cx+C^2$, $y=+\sqrt{C}$, $y=-\frac{1}{4(x+1)}$ (solución particular). **1.89.** $y=Cx-e^C$, $y=+x(\ln x-1)$ (solución particular) **1.90.** $y=Cx+\cos C$, $y=x\arcsen x+\sqrt{1-x^2}$ (solución particular). **1.91.** Lineal; $y=uv$. **1.92.** Homogénea; $y=ux$. **1.93.** Con las variables separables. **1.94.** Ecuación de Bernoulli; $y=uv$. **1.95.** Lineal respecto a x; $x=uv$. **1.96.** Ecuación en diferenciales totales **1.97.** Homogénea; $x=uy$. **1.98.** Ecuación de Bernoulli respecto a x; $x=uv$. **1.99.** La que se reduce a la ecuación con variables separables; $u=y-x$. **1.100.** Lineal; $y=uv$. **1.101.** Ecuación de Bernoulli; $y=uv$. **1.102.** $y=x^2-2+Ce^{-x^2/2}$. **1.103.** $\ln|y|+\frac{x}{y}=C$, $y=0$ (solución particular). **1.104.** $\frac{1}{2}x^2\cos 2y+x=C$. **1.105.** $y=\frac{1}{(x+C)\cos x}$. **1.106.** $y=\sqrt[4]{C+3x-3x^2}$. **1.107.** $x=\frac{1}{2}y^2+Cy^3$. **1.108.** $\ln|x|+e^{x/y}=C$, $x=0$ (solución particular). **1.109.** $1+y^2=C(1-x^2)$. **1.110.** $x^4-x^2y^2+y^4=C$. **1.111.** $y=1/(1+\ln x+Cx)$. **1.112.** $(3x+2y-1)(x-1)=C$. **1.113.** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}+C$. **1.114.** $2y\cos x+\cos 2x=C$. **1.115.** $x^2+x\ln y-\cos y=C$. **1.116.** $y=Cx-\ln C$, $y=1+\ln$ (solución particular). **1.117.** $x=1/(Ce^{-y^2/2}+2-y^2)$. **1.118.** $\ln|x|-\cos\frac{y}{x}=C$. **1.119.** $x\sqrt{1+y^2}-\operatorname{sen} y=C$. ● Escríbase la ecuación en forma $\frac{dx}{dy}+\frac{y}{1+y^2}x=\frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}}$. **1.120.** $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$. **1.121.** $y=\left(\frac{C+\ln|\operatorname{sen} x|}{x}-\right.$ $\left.-\operatorname{ctg} x\right)^2$. **1.122.** $y=C^2+Cx-\frac{x^2}{4}$, $y=-\frac{x^2}{2}$ (solución particular). **1.123.** $(x+y^3)^3=C(y^3-x)$. ● Póngase $y=z^{1/3}$. **1.124.** $y=\pm$ $\pm\ln|x^2-1|$. **1.125.** 1) $y^2=4x$, 2) $xy^2=4$. **1.126.** $y=\pm\frac{x}{x-1}$. **1.127.** $(x+C)^2+y^2=a^2$. **1.128.** $y^2=\pm 2a(x+C)$. **1.129.** $y=2\operatorname{ch}\frac{x}{2}$. **1.130.** $y^2=x^2/(x^2+3)$. **1.131.** $y^2=6x+9$. **1.132.** 1) $y^2=4(x-$ $-1)$, 2) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$. **1.133.** $y^2=\frac{2}{3}x$. **1.134.** $r=2e^{\varphi/a}$. **1.135.** $x^2+y^2=2y$. **1.136.** $x=y(3\pm\ln|y|)$. **1.137.** $y^2=2x+1-e^{2x}$. **1.138.** $y=\frac{1}{x}-x^2$. **1.139.** $x=\pm\left(\frac{1}{y}-y\right)$. **1.140.** $y=x\sqrt{5x^2-1}$.

1.141. $r=\varphi+\frac{\pi}{2}$. **1.142.** $2x^2+3y^2=C^2$. **1.143.** $x^2+2y^2=C^2$. **1.144.** $y=C/x^2$. **1.145.** $x+y^2=C$. **1.146.** $T=a+(T_0-a)\,e^{-kt}$. **1.147.** Al cabo de 40 min. **1.148.** $\omega=5\cdot(3/5)^{t/120}$ (r.p.s.); al cabo de 6 min 18 s. ● La ecuación tiene la forma de $\frac{d\omega}{dt}=-k\omega$. **1.149.** Al cabo de 1575 años. **1.150.** En 6 min 5 s. ● La ecuación tiene el aspecto de $wv\,(h)\,dt=-S\,(h)\,dh$ donde w es el área del orificio, $v\,(h)$ es la velocidad de salida del agua, h es el nivel del agua, $S\,(h)$ es el área de la sección transversal del recipiente, t es el tiempo. **1.151.** 0,0878. ● La ecuación tiene la forma de $dQ=-kQdh$. **1.152.** ≈ 50 s; ≈ 15 m. **1.153.** $t\approx 0{,}0011$ s. ● La ecuación tiene el aspecto de $m\frac{dv}{dt}=-kv^2$. **1.154.** 0,5 kg. **1.155.** a) 56,5 g; b) 7,84 h. **1.156.** 0,06 %. ● La ecuación tiene la forma de $(0{,}01\,x-0{,}0004)\,1500\,dt=-10800\cdot 0{,}01\,dx$, donde x es el contenido de dióxido de carbono (en ‰) en el aire en el momento de tiempo t. **1.157.** $i=\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}\left(R\operatorname{sen}\omega t-L\omega\cos\omega t+L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

2.1. $y'<x^2$. **2.2.** $y'>0$. **2.9.** $y''=0$. **2.10.** $\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}=R^2$. **2.11.** $y''+y=0$. **2.12.** $y'''=0$. **2.13.** $y=(C_1+\operatorname{arctg}x)\,x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_2$. **2.14.** $y=\frac{x^3}{6}-\operatorname{sen}x+C_1x+C_2$. **2.15.** $y=\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{x}{C_1}+C_2$, $y=\frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{x-C_1}{x+C_1}\right|+C_2$, $y=C-\frac{1}{x}$. **2.16.** $C_1^2y=(C_1^2x^2+1)\operatorname{arctg}C_1x-C_1x+C_2$, $2y=k\pi x^2+C$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. **2.17.** $y=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x-\frac{1}{C_1}\right)+C_2$, $y=\frac{ex^2}{2}+C$. **2.18.** $y=\frac{1}{x}+C_1\ln x+C_2$. **2.19.** $y=C_1\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|\right)+x^2+C_2$, $y=C_1(x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen}x)+x^2+C_2$. **2.20.** $y=C_1(x-e^{-x})+C_2$. **2.21.** $2y=C_1\cos 2x+(1+2C_1)\,x^2+C_2x+C_3$. **2.22.** $2y=C_1x^2-2C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x+C_3$. **2.23.** $y=C_3-(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x$, $y=C_1x+C_2$. **2.24.** $x=2C_1p-\ln|p|+C_2$, $y=C_1p^3-p$; $y=Ce^{-x}$; $y=C$. **2.25.** $x=\pm\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2C_1)\sqrt{\sqrt{y}+C_1}+C_2$. **2.26.** $\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1y^2+1}=C_2\pm x$. **2.27.** $C_1^2y+1=\pm\operatorname{ch}(C_1x+C_2)$, $C_1^2y-1=\operatorname{sen}(C_1x+C_2)$, $2y=(x+C)^2$, $y=0$. **2.28.** $\ln y=C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$, $\ln\left|\frac{\ln y-C_1}{\ln y+C_2}\right|=2C_1x+C_2$, $(C-x)\ln y=1$, $y=C$. **2.29.** $\operatorname{ctg}y=C_2+C_1x$. **2.30.** $y=1+$

$+\frac{1}{C_1x+C_1}$. **2.31.** $y=\frac{1}{12}(x^3+6x^2)+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3$. **2.32.** $y^2=\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$. **2.33.** $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$. **2.34.** $y=C_2\left(xe^{C_1x}-\right.$ $\left.-\frac{1}{C_1}e^{C_1x}\right)+C_3$.

2.35. $y=C_2xe^{-C_1x}$. ● La ecuación es homogénea respecto a y, y', y''. **2.36.** $y=C_2e^{\frac{1}{3}(x^2+C_1)^{3/2}}$. **2.37.** $y^2=C_1x^3+C_2$ **2.38.** $y=$ $=\frac{C_2}{\cos^2(x+C_1)}$. **2.39.** $y=(x-2)e^x+x+3$. **2.40.** $y=-\frac{x}{2}\ln^2x+\frac{3}{2}x^2-$ $-2x+\frac{1}{2}$. **2.41.** $y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{2x}-\frac{16}{5}$. **2.42.** $y=2\ln|x+1|-x+1$. **2.43.** $y=-\ln|x-1|$. **2.44.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|=2(x+1)$. **2.45.** $y=$ $=\operatorname{tg}x$, $-\pi/2<x<\pi/2$. **2.46.** $y=e^{x^2/2}$. **2.47.** $(3-x)y^3=8(x+2)$. **2.48.** $y=1+\operatorname{sen}x$. **2.49.** $y=1-e^x$, $y=-1+e^{-x}$. **2.50.** $y=1-x$. **2.51.** $x=C_1e^p-2p-2p-2$, $y=C_1(p-1)e^p-p^2+C_2$. **2.52.** $x=$ $=\frac{\ln|t|}{2}+\frac{3}{4t^2}+C_1$, $y=\frac{t}{4}+\frac{3}{4t^3}+C_2$. **2.53.** $x=(p+1)e^p+C_1$, $y=$ $=p^2e^p+C_2$. **2.54.** $x=3C_1p^2+\ln|p|+C_2$, $y=2C_1p^3+p$; $y=C$. **2.55.** $y=\pm\ln\cos x$. **2.56.** a) $y=\frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x+C_2)$ para $y''>0$; b) $(x+C_2)^2+y^2=C_1^2$ para $y''<0$. **2.57.** a) $4(C_1y-1)=C_1^2(x+C_2)^2$ para $y''>0$; b) $x=\frac{C_1}{2}(t-\operatorname{sen}t)+C_2$, $y=\frac{C_1}{2}(1-\cos t)$ para $y''<$ <0. ● $\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}\,dy$ se calcula sustituyendo $y=C_1\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}$. **2.58.** $y=$ $=\frac{H}{q}\operatorname{ch}\left(\frac{q}{H}x\right)$. **2.59.** $e^{b/a}=\frac{1}{\cos x/a}$, donde $a=\frac{k}{q}$. **2.60.** $v=$ $=\sqrt{\frac{P}{k}}\operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{kp}}{m}t\right)$, $x=\frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{kp}}{m}t\right)$. **2.61.** 1,89 s, 16,6 m/s. ● Empléense las respuestas al problema **2.60.** poniendo $P=mg$. **2.62.** El tiempo de subida es $T_s=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{g}}\operatorname{arctg}\frac{kv_0}{\sqrt{mg}}$; la altura de elevación es $h_{máx}=\frac{m}{2k^2}\ln\left(1+\frac{k^2v_0^2}{mg}\right)$; la velocidad de caída $V_c=v_0\sqrt{\frac{mg}{mg+k^2v_0^2}}$; el tiempo de caída es $T_c=\frac{1}{2k}\sqrt{\frac{m}{g}}\ln\times$ $\times\frac{\sqrt{mg}+kV_c}{\sqrt{mg}-kV_c}$. **2.63.** 1,75 s, 16,3 m/s. ● Empléense las respuestas

al problema 2.62. **2.64.** $x=\sqrt{x_0^2+\frac{k}{mx_0^2}t^2}$. **2.65.** $x=\sqrt{x_0^2-\frac{k^2}{x_0^2}t^2}$, $T=\frac{x_0^2}{k}$. **2.66.** $x=-\frac{gt^2}{2}+v_0\int\limits_0^t \ln\frac{\varphi(0)}{\varphi(t)}\,dt$; $x=-\frac{gt^2}{2}+$ $+\frac{v_0}{\alpha}((1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t)$, $x(10)=0{,}54$ km, $x(30)=5{,}65$ km, $x(50)=18{,}44$ km. **2.67.** $\sqrt{\frac{H}{2gR^2}}\left(\sqrt{R(H-R)}+\frac{H}{2}\times\right.$ $\left.\times\operatorname{arcsen}\left(1-\frac{2R}{H}\right)+\frac{H}{4}\right)$. **2.68.** ≈ 116 h. ● Empléese la respuesta al problema 2.67. **2.69.** $\approx 11{,}18$ km/s. **2.70.** $y=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{1+k}\times\right.$ $\left.\times\left(\frac{x}{a}\right)^{1+k}-\frac{1}{1-k}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k}\right)+\frac{ka}{1-k^2}$, donde $k=\frac{v}{u}<1$. **2.71.** $EIy=-\frac{q}{4}\left(\frac{l^2x^2}{4}-\frac{x^4}{6}-\frac{5l^4}{96}\right)$, $EIy_{\text{máx}}=-\frac{5l^4q}{384}$. ● $EIy''=$ $=-\frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right)$, donde E es el módulo de elasticidad (módulo de Younge), I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje Ox **2.72.** $EIy=\left(\frac{Pl^2}{2}+\frac{ql^3}{6}\right)x-\frac{Px^3}{6}-$ $-\frac{qx^4}{24}-\frac{Pl^3}{3}-\frac{ql^4}{8}$, $EIy_{\text{máx}}=-\frac{Pl^3}{3}-\frac{ql^4}{8}$. ● $EIy''=-Px-$ $-\frac{qx^2}{2}$, donde E es el módulo de elasticidad (módulo de Younge), I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje Ox. **2.73.** $P=\frac{3}{8}ql$. ● $EIy''=P(l-x)-\frac{q(l-x)^2}{2}$, $EIy=\frac{P(l-x)^3}{6}-\frac{q(l-x)^4}{24}+\left(\frac{Pl^2}{2}-\frac{ql^3}{6}\right)x-\frac{Pl^3}{6}+\frac{ql^4}{24}$, donde E es el módulo de la elasticidad (módulo de Younge), I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje Ox. **2.75.** $y=C_1e^{5x}+C_2e^{x}$. **2.76.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$. **2.77.** $y=$ $=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. **2.78.** $y=C_1\left(\frac{1}{2}x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1\right)+C_2x$. **2.79.** $y=C_1x+\frac{C_2}{x}+\frac{C_3}{x}$. **2.80.** Linealmente independiente. **2.81.** Linealmente dependiente. **2.82.** Linealmente independiente. **2.83.** Linealmente dependiente. **2.84.** Linealmente independiente. **2.85.** Linealmente independiente. **2.86.** Linealmente independiente. **2.87.** Linealmente independiente. **2.88.** Linealmente dependiente. **2.89.** Linealmente independiente. **2.90.** $y''+y'=0$. **2.91.** $y''-$ $-4y'+5y=0$. **2.92.** $x^2y''-6xy'+12y=0$. **2.93.** $y'''-y''=0$. **2.94.** $y'''+y'=0$. **2.95.** $y'''-y''=0$. **2.96.** $y''-8y'+15y=0$.

2.97. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$. **2.98.** ◀ De la igualdad $W(x_0) = 0$ se deduce que el sistema homogéneo de ecuaciones algebraicas lineales con incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ &\alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

tiene tal solución $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ que no todos α_n^* son iguales a cero. La función $y(x) = \alpha_1^* y_1(x) + \alpha_2^* y_2(x) + \ldots + \alpha_n^* y_n(x)$ es la solución de la ecuación homogénea lineal dada y, como se deduce de las igualdades (*), satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Pero a las mismas condiciones iniciales las satisface también la función $y \equiv 0$, que es también la solución de la ecuación dada (la función $y \equiv 0$ es la solución de cualquier ecuación diferencial homogénea lineal). De aquí, basándose en el teorema de Cauchy sobre la existencia y unicidad de la solución, concluimos que $\alpha_1^* y_1(x) + \ldots + \alpha_n^* y_n(x) \equiv 0$ en (a, b), es decir, el sistema de las funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ es linealmente dependiente en (a, b). Pero, entonces, el wronskiano $W(x)$ de este sistema es igual a cero en todos los puntos de (a, b), lo que se requería demostrar. ▶

2.99. $\begin{vmatrix} y & y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y' & y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0$. ● Cualquier solución y de la ecuación buscada junto con las funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ forma un sistema linealmente dependiente. **2.100.** $y = e^x + 2\cos x + 3\operatorname{sen} x$. **2.101.** $y = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x}$. **2.102.** $y = C_1 x^3 + C_2 x^4 + \frac{1}{2}x$. **2.103.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos x + e^{3x}$. **2.104.** $y = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1$. **2.105.** $y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x - \operatorname{sen} x \cos x$. **2.106.** $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^x + 5x + 6 - e^{2x}$. **2.107.** $y = C_1 + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos x + \frac{1}{2}e^x - \operatorname{sen} 2x$. **2.108.** $y = e^{kx}(1 + (1 - k)x)$. **2.109.** $y'' - y' - 6y = 0$, $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$. **2.110.** $y'' - 2y' + y = 0$, $y = (C_1 + C_2 x)e^x$. **2.111.** $y'' - 6y' + 13y = 0$, $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x)e^{3x}$. **2.112.** $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$, $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{2x}$. **2.113.** $y''' - 8y'' + 16y' = 0$, $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{4x}$. **2.115.** $y = C_1 e^{(1-\sqrt{3})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{3})x}$. **2.116.** $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x)$. **2.117.** $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$. **2.118.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$. **2.119.** $y = e^x\left(C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)$. **2.120.** $y = e^{-x/2}(C_1 + C_2 x)$. **2.121.** $y = C_1 e^x + e^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \operatorname{sen} 3x)$. **2.122.** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos\sqrt{3}x + C_4 \operatorname{sen}\sqrt{3}x$. **2.123.** $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^{-x}$. **2.124.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$. **2.125.** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x(C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x)$. **2.126.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + (C_3 + C_4 x)e^{-2x}$. **2.127.** $y = C_1 +$

$+ C_2 \cos 2x + C_3 \operatorname{sen} 2x + x\,(C_4 \cos 2x + C_5 \operatorname{sen} 2x)$. **2.128.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{3x}\,(C_4 + C_5 x)$. **2.129.** $y = (C_1 + C_2 x)\,e^x + (C_3 + C_4 x)\cos x + (C_5 + C_6 x)\operatorname{sen} x$. **2.130.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^3 + e^{-x}\,(C_5 + C_6 x)$. **2.131.** $y = e^x$. **2.132.** $y = (7 - 3x)\,e^{x-2}$. **2.133.** $y = 2 + e^{-x}$. **2.134.** $y = \operatorname{sh} x$. Las condiciones iniciales son: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.135. $y = \dfrac{5}{2}\,e^x - \dfrac{1}{2}\,e^{3x}$. **2.136.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln (e^x + 1)$. **2.137.** $y = (C_1 - \ln |\operatorname{sen} x|)\cos 2x + \left(C_2 - x - \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg} x\right)\operatorname{sen} 2x$. **2.138.** $y = \left(C_1 + C_2 x + \sqrt{4 - x^2} + x \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{2}\right) e^x$.

2.139. $y = \left(C_1 + C_2 x + \dfrac{1}{2}\,x^2 \ln x - \dfrac{3}{4}\,x^2\right) e^{-2x}$. **2.140.** $(Ax^3 + Bx^2)\,e^{4x}$.

2.141. $x\,(A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x)$. **2.142.** $Ax + B \cos 8x + C \operatorname{sen} 8x$. **2.143.** $(Ax + B)\operatorname{sen} 2x + (Cx + D)\cos 2x$. **2.144.** $(Ax^2 + Bx)\,e^{4x}$. **2.145.** $Ax^3 + Bx^2 + Cx$. **2.146.** $e^x\,((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D) \times \operatorname{sen} 2x)$. **2.147.** $xe^{2x}\,((Ax^2 + Bx + C)\cos 3x + (Dx^2 + Ex + F) \times \operatorname{sen} 3x)$.

2.148. $y = C_1 e^x + \left(C_2 - \dfrac{x}{2}\right) e^{-x}$. **2.149.** $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x + \dfrac{x \operatorname{sh} x}{2}$. **2.150.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \dfrac{x}{5}\,e^{-4x} + \left(\dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{36}\right) e^{-x}$.

2.151. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \dfrac{1}{6}\,(5 \cos 3x - \operatorname{sen} 3x)$. **2.152.** $y = (C_1 + C_2 x)\,e^{mx} + \dfrac{(m^2 - n^2)\operatorname{sen} nx + 2mn \cos nx}{(m^2 + n^2)^2}$. **2.153.** $y = (C_1 + C_2 x) \times e^{mx} + \dfrac{1}{2m^2}\cos mx$.

2.154. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x\,(x \operatorname{sen} x + \cos x)$. **2.155.** $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \dfrac{1}{8}\,(1 + x \operatorname{sen} 2x)$. **2.156.** $y = C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-x/2} + x^3$. **2.157.** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \dfrac{1}{2}\,e^{-x} + xe^{-2x}$. **2.158.** $y = C_1 + C_2 e^{3x} + \dfrac{x}{3}\,e^{3x} + 2x + 3x^2$. **2.159.** $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + x)\,e^{-x} + x^3 - 3x^2$.

2.160. $y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dfrac{x^3}{6}\right) e^x$. **2.161.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x + \dfrac{x^2}{12}\,(x^2 + 2x - 12)$. **2.162.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x + \dfrac{x}{8}\,(x - 3)\,e^x - \dfrac{x}{4}\operatorname{sen} x$. **2.163.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \dfrac{x^4}{24} + \left(\dfrac{x^2}{2} - 4x + C_5\right) e^x$.

2.164. $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$. **2.165.** $y = e^x - e^{-x} + x^2$. **2.166.** $y = \frac{x}{4} + \cos 2x + \frac{7}{16}\pi \operatorname{sen} 2x$. **2.167.** $y = 2\cos x - 5 \operatorname{sen} x + 2e^x$. **2.168.** $y = 2xe^x$. **2.169.** $y = \cos x + 2 \operatorname{sen} x + e^{-x} - 3e^x + 2xe^x$. **2.170.** $y = e^x((2x - \pi - 1)\operatorname{sen} x - \pi \cos x)$. **2.171.** $y = C_1 \times \times \cos \ln |x| + C_2 \operatorname{sen} \ln |x|$. **2.172.** $y = C_1 \cos(2 \ln |x|) + C_2 \times \times \operatorname{sen}(2 \ln |x|) + 2x$. **2.173.** $y = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x_2} - 2 \ln x + \frac{1}{3}$. **2.174.** $y = C_1 + C_2 x^2 + C_3 x^4$. **2.175.** $y = C_1 + C_2 \ln |x| + C_3 x^3$. **2.176.** $y = (2x + 1)(C_1 + C_2 \ln |2x + 1|)$.

2.177. $y = \frac{1}{\operatorname{sh} 2\pi} \cdot \operatorname{sh} x$. **2.178.** $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}$. **2.179.** $y = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} 1} \times$ $\times$(solución única). **2.180.** No hay soluciones. **2.181.** $(x-2)^2 + y^2 = 5$. **2.182.** $y = 1 - \operatorname{sen} x - \cos x$. **2.183.** $y = \sqrt{\frac{e - e^{-x}}{e-1}}$. **2.184.** $y = \frac{x}{2} - x^2 + x^2 \ln x$. **2.185.** $x = e^{-ht}\left(a \cos \beta t + \frac{ah + v_0}{\beta} \operatorname{sen} \beta t\right)$ donde $\beta = \sqrt{k^2 - h^2}$. ● La ecuación tiene la forma $\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0$. **2.186.** $x = e^{-\alpha t}\left(a \operatorname{ch} \beta t + \frac{\alpha a + v_0}{\beta} \operatorname{sh} \beta t\right)$, donde $\alpha = \frac{\lambda}{2m}$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 + \frac{k}{m}}$. ● La ecuación tiene la forma de $m \times \times \frac{d^2x}{dt^2} = kx - \lambda \frac{dx}{dt}$. **2.187.** a) $r = a \operatorname{ch} \omega t$; b) $r = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t$. ● La ecuación tiene la forma $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$. **2.188.** $r = ae^{-\mu\omega t} \times \times \left(\operatorname{ch} \omega \sqrt{1+\mu^2}t + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \operatorname{sh} \omega \sqrt{1+\mu^2}t\right)$. **2.189.** $T = \frac{3}{\sqrt{g}} \times \times \ln(9 + \sqrt{80}) \approx 3$ s. ● La ecuación tiene la forma de $\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{g}{9}s = \frac{g}{9}$, donde s es el camino recorrido durante el tiempo t por el extremo de la parte de la cadena que desciende. **2.190.** $x = \frac{2g \operatorname{sen} 30t - 60\sqrt{g} \operatorname{sen} \sqrt{g}t}{g - 900}$ (cm). ● Si x se calcula a partir del estado de reposo de la carga, entonces $4\frac{d^2x}{dt^2} = 4g - k(x_0 + x - y - e)$, donde x_0 es la distancia del punto de reposo de la carga desde el punto inicial de suspensión del resorte, l es la longitud del resorte en estado de reposo, por esto $k(x_0 - l) = 4g$ y, por consiguiente, $4\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - y)$, donde $k = 4g$, $g =$

-981 cm/s^2. **2.191.** $i = e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{E}{\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2+R^2}\left(\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\times\right.$

$\times\cos\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t-\frac{R}{2}\left(\omega+\frac{1}{LC\omega}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}\operatorname{sen}\times$

$\left.\times\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t\right)+\frac{E}{\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2}\left(\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)\cos\times\right.$

$\left.\times\omega t+R\operatorname{sen}\omega t\right)$. La ecuación diferencial del circuito es: $L\frac{d^2i}{dt^2}+$

$+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{de}{dt}$. **2.192.** $i=\frac{E}{2L}t\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. ◀ Tenemos

$\frac{de}{dt}=E\omega\cos\omega t$. La ecuación diferencial del circuito es: $L\frac{d^2i}{dt^2}+$

$+\frac{1}{C}i=E\omega\cos\omega t$. La solución general de la ecuación homogénea

correspondiente es: $i_0=C_1\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+C_2\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. La solución

particular de la ecuación no homogénea lineal tiene la forma de

$\tilde{i}=t\,(A\cos\omega t+B\operatorname{sen}\omega t)$. Entonces $\frac{d\tilde{i}}{dt}=t\,(-A\omega\operatorname{sen}\omega t+$

$+B\omega\cos\omega t)+A\cos\omega t+B\operatorname{sen}\omega t$, $\frac{d^2\tilde{i}}{dt^2}=t(-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\times$

$\times\operatorname{sen}\omega t)+(-2A\omega\operatorname{sen}\omega t+2B\omega\cos\omega t)$. Sustituyendo en la ecuación

la expresión $\tilde{i}$ y $\frac{d^2\tilde{i}}{dt^2}$ y considerando que $L\omega^2-\frac{1}{C}=0$, obtendremos la identidad $L\,(-2A\omega\operatorname{sen}\omega t+2B\omega\cos\omega t)\equiv E\omega\cos\omega t$, de donde $A=0$, $B=\frac{E}{2L}$. Por consiguiente, $\tilde{i}=\frac{E}{2L}t\operatorname{sen}\frac{t}{\sqrt{LC}}$. La solución general: $i=C_1\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+C_2\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{E}{2L}t\operatorname{sen}\times$

$\times\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. Calculando $\frac{di}{dt}=-\frac{C_1}{\sqrt{LC}}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{C_2}{\sqrt{LC}}\cos\times$

$\times\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{E}{2L\sqrt{LC}}t\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{E}{2L}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}t$ y empleando las condiciones iniciales, obtendremos $C_1=C_2=0$. La solución particular buscada es: $i=\frac{E}{2L}t\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. ▶ **2.193.** $i=$

$-\frac{E}{2\omega L}\cos\psi\operatorname{sen}\omega t+\frac{E}{2L}t\cos(\omega t+\psi)$.

3.1. $x^2+y^2-z^2=2z\,(y-xy')$, $x+yy'-zz'=z'\,(y-xy')$. 3.2. $yy'+zz'=0$, $y^2+2xzz'=x^2z'^2$. 3.3. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{u}=\frac{du}{xyz-z^3}$. 3.4. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{u}=\frac{du}{v}=\frac{dv}{w}=\frac{dw}{y^2}$. 3.5. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=\frac{du}{t}=$ $=\frac{dv}{v+w}=\frac{dw}{w+t}=\frac{dt}{t+v}$. 3.6. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{du}=\frac{du}{2y-z}=\frac{dv}{w}=$ $=\frac{dw}{x+y-1}$. 3.7. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{t}=\frac{dz}{x^2-uz}=\frac{dt}{z+u}=\frac{du}{v}=\frac{dv}{w}=$ $=\frac{dw}{-xy}$. 3.13. $C_1x^2=2t+C_2$, $y^2=C_1(2t+C_2)$. 3.14. $x^2=t^2+C_1$, $y^2=t^2+C_2$. 3.15. $y^2=\frac{(C_1+C_2-x)^2}{2(C_2-x)}$, $z^2=\frac{(C_1-C_2+x)^2}{2(C_2-x)}$. 3.16. $x=\ln|C_3(C_1t+C_2)|$, $y=\ln|C_3(C_1t+C_2)|-C_1$, $z=(C_1+1)t+C_2$. 3.17. $x^2+y^2+z^2=C_1y$, $z=C_2y$. 3.18. $x=C_1t$, $y=C_2e^t+\frac{2}{C_1}$. 3.19. $z-2y=C_1$, $2\sqrt{z-x-y}+y=C_2$. 3.20. $x^2=$ $=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$, $y^2=C_1e^{2t}-C_2e^{-2t}$. 3.21. $y=x+\frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}$, $z=C_2e^{C_1x}$; $y=x-e^x$, $z=e^{-x}$. 3.22. $z=C_1y$, $y^3=\frac{3x^2}{2C_1}+C_2$; $z=y$, $y^3=\frac{3}{2}x^2+1$. 3.23. a) Sí; b) no. ● La relación $\varphi(t, x, y)=C$ es la primera integral del sistema $x'_t=f_1(t, x, y)$, $y'_t=f_2(t, x, y)$, cuando y sólo cuando $\frac{\partial\varphi}{\partial t}+f_1(t, x, y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+f_2(t, x, y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$. 3.24. $2e^{2-y}=x^2+(y-1)^2$. 3.25. $2y^3+3y(x^2-1)-8=0$. 3.26. $y=$ $=x(1+\ln\sqrt{|x|})$. 3.27. $(y-x)^2+x^2=1$. 3.28. $y=C_1x^{1+\sqrt{2}}+$ $+C_2x^{1-\sqrt{2}}$, $z=x^{\sqrt{2}-1}C_1(2+\sqrt{2})+x^{-\sqrt{2}-1}C_2(2-\sqrt{2})$. 3.29. $y=C_1+C_2x$, $z=2C_2+\frac{C_1}{x}$. 3.30. $x=C_1t+\frac{C_2}{t}$, $y=-C_1t+$ $+\frac{C_2}{t}$. 3.31. $x=\frac{C_2}{t^2}$, $y=C_1e^t-\frac{C_2}{t^2}$. 3.32. $x=C_1e^t+C_2e^{2t}$, $y=$ $=C_1e^t+2C_2e^{2t}$. 3.33. $x=3C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$, $y=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$; $x=3e^{2t}$, $y=e^{2t}$. 3.34. $x=e^{5t}(C_1\cos 2t+C_2\operatorname{sen}2t)$, $y=e^{5t}((C_1-C_2)\operatorname{sen}2t-$ $-(C_1+C_2)\cos 2t)$; $x=e^{5t}(\cos 2t-\operatorname{sen}2t)$, $y=2e^{5t}\operatorname{sen}2t$. 3.35. $x=$ $=e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\operatorname{sen}3t)$, $y=\frac{1}{5}e^{-2t}((4C_1-3C_2)\cos 3t+(3C_1+$ $+4C_2)\operatorname{sen}3t)$. 3.36. $x=(2C_1t+2C_2+1)e^{-t}$, $y=(C_1t+C_2)e^{-t}$. 3.37. $x=(C_1t+C_2)e^{-3t}$, $y=\left(-C_1t+\frac{C_1}{2}-C_2\right)e^{-3t}$; $x=2te^{-3t}$,

$y=(1-2t)\,e^{-3t}$. 3.38. $x=C_1e^t+e^{-t/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, $y=C_1e^t+\frac{1}{2}e^{-t/2}\left((C_3\sqrt{3}-C_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-(C_2\sqrt{3}+C_3)\operatorname{sen}\times\right.$ $\left.\times\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, $z=C_1e^t+\frac{1}{2}e^{-t/2}\left((C_2\sqrt{3}-C_3)\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t-(C_3\sqrt{3}+\right.$ $\left.+C_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; $x=y=z=e^t$. 3.39. $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$, $y=$ $=C_1e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1e^{2t}-(C_2+C_3)\,e^{-t}$; $x=e^{2t}+e^{-t}$, $y=e^{2t}+e^{-t}$, $z=e^{2t}-2e^{-t}$. 3.40. $x=C_1+3C_2e^{2t}$, $y=-2C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1+$ $+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}$. 3.41. $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$, $y=C_1e^t+2C_3e^{3t}$, $z=2C_1e^t+C_2e^{2t}+2C_3e^{3t}$. 3.42. $x=2C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-\frac{2}{3}t-\frac{5}{18}$, $y=C_1e^{2t}+3C_2e^{-3t}-\frac{t}{2}-\frac{1}{12}$. 3.43. $x=(C_1\cos t+C_2\operatorname{sen}t-1)\,e^t$, $y=(C_1\operatorname{sen}t-C_2\cos t)\,e^t$. 3.44. $x=\left(C_1+C_2t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2}-3e^t\right)e^{2t}$, $y=\left(C_1-\frac{C_2}{3}+C_2t+\frac{t^3}{2}-2e^t\right)e^{2t}$. 3.45. $x=C_1\cos t+C_2\operatorname{sen}t-$ $-t\cos t$, $y=(C_2-C_1)\cos t-(C_1+C_2)\operatorname{sen}t+t(\cos t+\operatorname{sen}t)$. 3.46. $x=C_1\cos t+C_2\operatorname{sen}t+\operatorname{tg}t$, $y=-C_1\operatorname{sen}t+C_2\cos t+2$. 3.47. $x=3\,(C_1e^{2t}+C_2e^{-2t})+C_3\cos 2t+C_4\operatorname{sen}2t$, $y=2(C_1e^{2t}+$ $+C_2e^{-2t})-2\,(C_3\cos 2t+C_4\operatorname{sen}2t)$. ● Búsquese la solución del sistema en forma de $x=Ae^{kt}$, $y=Be^{kt}$. 3.48. $x=a\,(1-2^{-t})/4$, $y=$ $=3a\,(1-2^{-t})/4$. ● El sistema de ecuaciones diferenciales es: $\dot{x}=k_1\,(a-x-y)$, $\dot{y}=k_2\,(a-x-y)$. 3.49. $x=a\cos\frac{k}{\sqrt{m}}t$, $y=$ $=\frac{v_0\sqrt{m}}{k}\operatorname{sen}\frac{k}{\sqrt{m}}t$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{mv_0^2}=1$. ● La ecuación diferencial del movimiento es $m\ddot{x}=-k^2x$, $m\ddot{y}=-k^2y$.

4.1. Inestable. 4.2. Estable. 4.3. Inestable. 4.4. Asintóticamente estable. 4.5. Asintóticamente estable si, $\alpha<-1/2$; estable, si $\alpha=$ $=-1/2$ e inestable para $\alpha>-1/2$. 4.6. $z_i=-\varphi_i+f_i\,(t,\ z_1+$ $+\varphi_1(t),\ \ldots,\ z_n+\varphi_n(t))-F_i\,(t,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)$ $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. ● Transfórmese el sistema (1) para nuevos variables, poniendo $z_i=$ $=x_i-\varphi_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. 4.7. El punto de reposo $x_i\equiv 0$ $(i=$ $=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ del sistema de ecuaciones diferenciales es estable, si para cualquier $\varepsilon>0$ se encuentra $\delta\,(\varepsilon)>0$ tal que de la desigualdad $\sum_{i=1}^{n}x_i^2\,(t_0)<\delta^2\,(\varepsilon)$ se deduce $\sum_{i=1}^{n}x_i^2\,(t)<\varepsilon$ para todos los $t\geqslant t_0$. Si, además, se cumple la relación $\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\,(t)=0$, entonces el

punto de reposo del sistema es asintóticamente estable. El punto de reposo es inestable, si existen $\varepsilon > 0$ y el número t_0 tales, que para todo $\delta > 0$ de la desigualdad $|x_i(t_0)| < \delta$ se deduce $|x_i(t)| > \varepsilon$ para cierto $t > t_0$. 4.9. Foco inestable. 4.10. Ensilladura. 4.11. Foco inestable. 4.12. Nudo estable. 4.13. Nudo estable. 4.14. Nudo estable. 4.15. Para ningún α. 4.16. $|\alpha| \geqslant 2$. 4.17. $\alpha < 0$, $|\alpha| \geqslant |\beta|$ es el caso de un «rozamiento negativo» grande, el punto de reposo es un nudo inestable; $\alpha < 0$, $|\alpha| < |\beta|$ es el caso de un «rozamiento negativo», el punto de reposo es un foco inestable; $\alpha = 0$, el punto de reposo es estable, centro; $\alpha > 0$, $|\alpha| < |\beta|$, el punto de reposo es un foco estable; $\alpha > 0$, $|\alpha| \geqslant |\beta|$, la resistencia del medio es grande, el punto de reposo es un nudo estable. ● Sustitúyase la ecuación por el sistema normal equivalente $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -2\alpha y - \beta^2 x$. 4.18. Empléese la notación de la solución particular del sistema homogéneo para diferentes valores de la raíz característica. 4.19. Inestable. 4.20. Estable. 4.21. $V = x^2 + y^2$; estable. 4.22. $V = x^2 + y^2$; inestable. 4.23. $V = x^4 + y^4$; estable. 4.24. $V = x^2 + y^2$; inestable. 4.25. $V = 2x^2 + y^2$; estable. 4.26. $V = y^2 - \frac{1}{2}x^4$; inestable. 4.27. Estable. 4.28. Inestable. 4.29. Inestable. 4.30. Estable. 4.31. Estable. 4.32. Inestable. 4.33. $V = 3x^2 + 4y^2$; asintóticamente estable.

5.1[1]). $y(1) = 1{,}3280$. 5.2. $y(0{,}6) = 4{,}4828$. 5.3. $y(0{,}3) = 0{,}0451$. 5.4. $y(2) = -0{,}8407$. 5.5. $y(1) = 0{,}7899$. 5.6. $y(1) = 0{,}3305$. 5.7. $y(1) = 0{,}3635$. 5.8. $y(2) = 3{,}4547$. 5.9. $y(1) = 3{,}7190$. 5.10. $y(2) = 2{,}3683$. 5.11. $y(0{,}1) = 0{,}1057$. 5.12. $y(0{,}5) = 0{,}0461$. 5.13. $y(2) = 4{,}2489$. 5.14. $y(0{,}4) = 0{,}4647$. 5.15. $y(0{,}1) = 0{,}1098$. 5.16. $y(0{,}5) = 0{,}6842$. 5.17. $y(1) = 0{,}4388$. 5.18. $y(1) = 0{,}3679$. 5.19. $y(2) = 0{,}7895$.

5.20.

```
      SUBROUTINE EULER (F, X0, Y0, H, N, Y)
      DIMENSION Y(N)
      H3 = H**3
      X = X0 - H
      U = Y0
      K = 0
    3 X = X + H
      FUNC = F (X, Y)
      Y1 = U + H*FUNC
    1 Y2 = U + (FUNC + F (X, Y1))* H/2.
      IF (ABS (Y2—Y1).LT.H3) GO TO 2
      Y1 = Y2
      GO TO 1
    2 K = K + 1
      Y (K) = Y2
```

[1]) En las respuestas a los problemas 5.1—5.19, así como a 5.26—5.31 se dan los valores de la solución buscada en el extremo del segmento dado.

```
      U = Y2
      IF (K.LT.N) GO TO 3
      RETURN
      END
```

5.21.

```
      SUBROUTINE RK (F, X0, Y0, H, N, Y, EPS)
      DIMENSION Y (N)
      M = 1
      DO 1 I = 1, N
    1 Y (I) = 0
    2 X = X0
      U = Y0
      DO 4 j = 1, N
      DO 3 K = 1, M
      Q1 = F (X, U)* H
      Q2 = F (X + H/2., U + Q1/2.) * H
      Q3 = F (X + H/2., U + Q2/2.) * H
      Q4 = F (X + H, U + Q3) * H
      DY = (Q1 + 2 * Q2 + 2 * Q3 + Q4)/6.
      U = U + DY
    3 X = X + H
      A = ABS ((U - Y (J))/15.)
      Y (J) = U
      IF (A.GT.EPS) KIND = 1
    4 CONTINUE
      IF (KIND.EQ.0) GO TO 5
      RETURN
    5 H = H/2.
      M = M*2
      KIND = 0
      GO TO 2
      END
```

5.22.

```
      SUBROUTINE MILN (F, X0, H, N, Y, EPS)
      DIMENSION
      NI = N - 4
      EPS = 0.
      X = X0
      F1 = F (X + H, Y (2))
      F2 = F (X + 2.*H, Y (3))
      F3 = F (X + 3.*H, Y (4))
      DO 1 K = 1, NI
      YW = Y (K) + (2. F1 - F2 + 2.*F3) * 4.*H/3.
```

```
      Y (K + 4) = Y (K + 2) + (F2 + 4.*F3 + F (X + 4.*H, YW))*
     *H/3.
      A = ABS (YW - Y (K + 4))/29.
      EPS = AMAX1 (A, EPS)
      F1 = F2
      F2 = F3
      F3 = F (K + 4)
    1 X = X + H
      RETURN
      END
```

5.23. En la tarea para la calculadora entran tres unidades de programa:

a) subprograma

```
SUBROUTINE EULER (F, X0, Y0, H, N, Y)
```

b) subprograma-función (para el problema 5.12)

```
FUNCTION F (X, Y)
F = 2.*X*Y + X*X
RETURN
END
```

c) programa principal

```
EXTERNAL F
DIMENSION Y (20), A (40)
CALL EULER (F, 0., 0., 0.025, 20, Y)
CALL EULER (F, 0., 0., 0.0125, 40, A)
B = 0
DO 1 K = 1,20
C = ABS (Y (K) - A (2*K - 1))/7.
1 B = AMAX1 (B, C)
  WRITE (3,2) A,B
2 FORMAT (5 (1H, 8F12.6), 'ERROR = ', F10.8)
  STOP
  END
```

5.24. Tarea para la calculadora para el problema 5.18:

a) subprograma

```
SUBROUTINE RK (F, X0, Y0, H, N, Y, EPS)
```

b) subprograma-función

```
FUNCTION F (X, Y)
F = Y*Y*EXP (X) - 2.*Y
RETURN
END
```

c) programa principal

```
EXTERNAL F
DIMENSION Y (10)
```

```
      CALL RK (F, 0., 1., 0.1, 10, Y, 1E-4)
      WRITE (3,1) Y
    1 FORMAT (1H, 5F15.6)
      STOP
      END
```

5.25. Tarea para la calculadora para el problema 5.19:

a) subprograma

```
      SUBROUTINE MILN (F, X0, H, N, Y, EPS)
```

b) subprograma-función

```
      FUNCTION F (X, Y)
      F = 1./(Y*Y + X)
      RETURN
      END
```

c) programa principal

```
      EXTERNAL F
      DIMENSION Y (21)
      DATA Y (1)/0.63212/,Y(2)/0.652562 ,Y(3) 0.677129/,Y(4)/0.705863/
      CALL MILN (F, 1., 0.05, 21, Y, EPS)
      WRITE (3, 1) Y, EPS
    1 FORMAT (3 (1H, 7F12.6)', ERROR = ', F8.6)
      STOP
      END
```

5.26. $y(2) = 0{,}25$, $z(2) = 0{,}375$. 5.27. $y(1) = 1{,}261$, $z(1) = -2{,}346$. 5.28. $y(0{,}3) = 1{,}505$, $z(0{,}3) = 0{,}577$. 5.29. $y(0{,}3) = 0{,}638$, $z(0{,}3) = 1{,}568$. 5.30. $y(1) = 1{,}359$. 5.31. $y(2) = -1{,}833$.

5.32.

```
      SUBROUTINE RKD (F, FI, X0, Y0, Z0, H, N, Y, Z, EPS)
      DIMENSION Y (N), Z (N)
      M = 1
      DO 1 I = 1, N
      Y (I) = 0.
    1 Z (I) = 0.
    2 X = X0
      U = Y0
      V = Z0
      DO 4 J = 1,N
      DO 3 K = 1,M
      Q1Y = F (X, U, V)*H
      Q1Z = FI (X, U, V)*H
      Q2Y = F (X + H/2., U + Q1Y/2., V + Q1Z/2.)*H
      Q2Z = FI (X + H/2., U + Q1Y/2., V + Q1Z/2.)*H
      Q3Y = F (X + H/2., U + Q2Y/2., V + Q2Z/2.)*H
```

```
      Q3Z = FI (X + H/2., U + Q2Y/2., V + Q2Z/2.)*H
      Q4Y = F (X + H, U + Q3Y, V + Q3Z)*H
      Q4Z = FI (X + H, U + Q3Y, V + Q3Z)*H
      DY = (Q1Y + 2.*Q2Y + 2.*Q3Y + Q4Y)/6.
      DZ = (Q1Z + 2.*Q2Z + 2.*Q3Z + Q4Z)/6.
      U = U + DY
      V = V + DZ
    3 X = X + H
      A = ABS ((U - Y (J))/15.)
      B = ABS ((V - Z (J))/15.)
      Y (J) = U
      Z (J) = V
      IF (A.GT.EPS.OR.B.GT.EPS) KIND = 1
    4 CONTINUE
      IF (KIND.EQ.1) GO TO 5
      RETURN
    5 H = H/2.
      M = M*2
      KIND = 0
      GO TO 2
      END
```

5.33. Tarea para la calculadora, para el problema 5.29:

a) subprograma

```
SUBROUTINE RKD (F, FI, X0, Y0, Z0, H, N, Y, Z, EPS)
```

b) subprograma-función

```
FUNCTION F (X, Y, Z)
F = EXP (-1.*(Y**2 + Z**2)) + 2.*X
RETURN
END
```

c) subprograma-función

```
FUNCTION FI (X, Y, Z)
FI = 2.*Y**2 + Z
RETURN
END
```

d) programa principal

```
EXTERNAL F, FI
DIMENSION (Y20), Z (20)
CALL RKD (F, FI, 0., 0.5, 1., 0.1, 20, Y, Z, 1E - 4)
WRITE (3,1) Y, Z
1 FORMAT (1H, 10F10.4)
STOP
END
```

5.34. $y_1 = 2{,}953$, $y_3 = 4{,}375$, $y_5 = 6{,}359$. **5.35.** $y_1 = 1{,}926$, $y_2 = 2{,}593$, $y_3 = 3{,}333$, $y_4 = 4{,}148$, $y_5 = 5{,}037$, $y_6 = 6$. **5.36.** $y_1 = 0{,}874$, $y_2 = 0{,}743$, $y_3 = 0{,}611$, $y_4 = 0{,}482$, $y_5 = 0{,}362$, $y_6 = 0{,}253$, $y_7 = 0{,}161$, $y_8 = 0{,}087$, $y_9 = 0{,}033$. **5.37.** $y_1 = 2{,}019$, $y_2 = 3{,}956$, $y_3 = 5{,}720$, $y_4 = 7{,}212$, $y_5 = 8{,}316$, $y_6 = 8{,}908$, $y_7 = 8{,}855$, $y_8 = 8{,}044$, $y_9 = 6{,}413$, $y_{10} = 3{,}998$. **5.38.** $y_1 = 1{,}17$, $y_2 = 1{,}31$, $y_3 = 1{,}42$, $y_4 = 1{,}50$, $y_5 = 1{,}64$, $y_6 = 1{,}66$, $y_7 = 1{,}63$, $y_8 = 1{,}58$, $y_9 = 1{,}49$. **5.39.** $y_0 = 2$, $y_1 = 2{,}273$, $y_2 = 2{,}671$, $y_3 = 3{,}185$, $y_4 = 3{,}796$.

5.40. Tarea para la calculadora para el problema 5.38:

a) subprograma

```
SUBROUTINE EXCLUS (A, B, N)
```

b) programa principal

```
DIMENSION A (11, 11), B (11)
READ (1, 1) A, B
1 FORMAT (9F8.4)
CALL EXCLUS (A, B, 11)
WRITE (3, 2) B
2 FORMAT (', 9F8.3)
STOP
END
```

CAPÍTULO 10

ANALISIS VECTORIAL

§ 1. Campos escalares y vectoriales. Gradiente

1. Características geométricas de los campos escalares y vectoriales. Sea D un dominio en el espacio de dos, tres o n dimensiones. Se dice que en el dominio D está definido *el campo escalar*, si en D está dada la función escalar del punto $u(P) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(r)$ que se llama función del campo (r es el radio vector del punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$). Si a cada punto $P \in D$ está puesto en correspondencia el vector $\boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(r)$, entonces se dice que en el dominio D está definido el campo vectorial determinado por la función vectorial $\boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \boldsymbol{a}(r)$.

Las características geométricas más elementales de los campos escalares son *líneas de nivel* $u(x, y) = C$ en el espacio de dos dimensiones, *superficies de nivel*, o *superficies equipotenciales*, $u(x, y, z) = C$ en el espacio de tres dimensiones y *hipersuperficies de nivel* $u(x_1, \ldots, x_n) = C$ en el espacio $n > 3$ dimensiones. Las características geométricas más elementales de los campos vectoriales son líneas vectoriales y tubos vectoriales. Se llama *línea vectorial* la línea, cuya tangente en cada punto tiene una dirección que coincide con la dirección del vector del campo que le corresponde. Las líneas vectoriales para el vector $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ se determinan por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}$$

(análogamente para los campos planos y multidimensionales). Se llama *tubo vectorial* la superficie formada por las líneas vectoriales que pasan por los puntos de cierta curva cerrada situada en el campo y que no coincide (incluso parcialmente) con cualquier línea vectorial

Determínese el tipo de líneas o superficies (hipersuperficies) de nivel de los campos escalares siguientes:

1.1. $u = y^2 + x$.

1.2. $u = xy$.

1.3. $u = y/x$.

1.4. $u = x + y + z$.

1.5. $u = x^2 + y^2 - z^2$.

1.6. $u = x^2 + y^2 - z$.

1.7. $u = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

1.8. $u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Hállense las líneas vectoriales de los campos siguientes:

1.9. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$. **1.10.** $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$.

1.11. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. **1.12.** $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

1.13. $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}]$ ($\boldsymbol{c}$ es vector constante).

1.14. $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{i}}{x} + \frac{\boldsymbol{i}}{y} + \frac{\boldsymbol{k}}{z}$.

1.15. $\boldsymbol{a} = (y - z)\,\boldsymbol{i} + (z - x)\,\boldsymbol{j} + (x - y)\,\boldsymbol{k}$.

1.16. $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_4\boldsymbol{e}_4$.

1.17. Determínese el tipo de tubos vectoriales:
a) en el problema 1.12; b) en el problema 1.15.

2. Derivada direccional y gradiente del campo escalar. Sea $\boldsymbol{s} = \cos\alpha\cdot\boldsymbol{i} + \cos\beta\cdot\boldsymbol{j} + \cos\gamma\cdot\boldsymbol{k}$ el vector unitario de la dirección dada s, $\boldsymbol{r}_0 = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$ el radio vector del punto P_0 (x_0, y_0, z_0). *La derivada* del campo escalar u (P) en el punto P_0 respecto *a la dirección* s, designada mediante $\frac{\partial u}{\partial s}$ se determina por la relación

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\tau \to 0} \frac{u(\boldsymbol{r}_0 + \tau\boldsymbol{s}) - u(\boldsymbol{r}_0)}{\tau}$$

y caracteriza la velocidad de variación de la función u (P) en la dirección s. La derivada $\frac{\partial u}{\partial s}$ se calcula según la fórmula

$$\frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_{r=r_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{r=r_0}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{r=r_0}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{r=r_0}\cos\gamma. \qquad (1)$$

Se llama *gradiente* del campo escalar u (P), designado mediante el símbolo grad u, el vector cuyas proyecciones son las derivadas parciales de la función u (P) respecto a las coordenadas correspondientes, es decir,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\boldsymbol{k} \qquad (2)$$

De modo análogo se determina la derivada respecto a la dirección y el gradiente para los campos escalares n-dimensionales.

Partiendo de la expresión de la derivada respecto a la dirección (1) y de la definición del gradiente (2) demuéstrense las siguientes propiedades del gradiente:

1.18. La derivada del campo respecto a la dirección s es igual al producto escalar del gradiente del campo por el

vector unitario de la dirección dada, es decir, es igual a la proyección del gradiente en la dirección dada

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\text{grad } u, s) = |\text{grad } u| \cos \varphi,$$

donde φ es el ángulo entre el gradiente y el vector s.

1.19. La dirección del gradiente es la dirección del más rápido crecimiento de la función del campo.

1.20. En cada punto del campo el gradiente está dirigido por la normal a la superficie de nivel correspondiente, en dirección del crecimiento del potencial del campo, es decir,

$$|\text{grad } u| = \frac{\partial u}{\partial n},$$

donde n es la normal a la superficie de nivel dirigida hacia el crecimiento de la función del campo.

Hállense las derivadas de los campos siguientes en los puntos dados, según la dirección prefijada:

1.21. $u = x^2 + \frac{1}{2} y^2$ en el punto $P_0(2, -1)$ en dirección de P_0P_1, donde $P_1(6, 2)$.

1.22. $u = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 + z$ en el punto $P_0(2, 1, 1)$ en dirección de la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2}$ hacia el crecimiento del campo.

1.23. $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ en el punto P_0 (1, 3, 2, —1) en dirección del vector $a = 2e_1 + e_2 - 2e_4$.

1.24. Hállese el ángulo entre los gradientes del campo $u = x^2 + 2y^2 - z^2$ en los puntos P_1 (2, 3, —1) y P_2 (1, —1, 2).

1.25. Hállense la velocidad y la dirección del más rápido crecimiento del campo $u = xyz$ en el punto P_0 (1, 2, —2).

1.26. Hállese el vector unitario de la normal a la superficie de nivel del campo $u = x^2 + 2xy - 4yz$ en el punto P_0 (1, 1, —1), dirigido hacia el crecimiento del campo.

1.27. Hállense los puntos estacionarios del campo $u = 2x^2 - 4xy + y^2 - 2yz + 6z$.

1.28. Cerciórese de la ortogonalidad de las líneas de nivel de los campos:

a) $u = x^2 - y^2$, $v = xy$;

b) $u = 2x^2 + y^2$, $v = \frac{y^2}{x}$.

1.29. Cerciórese de la ortogonalidad de las superficies de nivel de los campos siguientes:

a) $x^2 + y^2 - z^2$, $v = xz + yz$;

b) $u = x^2 + y^2 - 2z^2$, $v = xyz$;

c) $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, $v = x_1x_3 + x_2x_4$, $w = x_1x_4 - x_2x_3$.

1.30. Hállese la familia de líneas del más rápido crecimiento para los campos siguientes:

a) el campo plano $u = x^2 - y^2$;

b) el campo tridimensional $u = xyz$;

c) el campo tridimensional $u = x^2 + y^2 - z^2$.

§ 2. Integrales curvilíneas y de superficie

1. Integrales curvilíneas de primera especie. Sean $\overset{\smile}{AB}$ el arco de una curva suave a trozos; $u(P)$, el campo escalar definido en AB; $A_0 = A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$ — la partición arbitraria del arco AB y P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) — son puntos arbitrarios en los arcos parciales $\overset{\smile}{A_{\nu-1}A_\nu}$, cuyas longitudes se designan mediante Δs_ν. Si existe el límite de la sucesión de las sumas integrales $\sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu) \times \Delta s_\nu$ para $\max_\nu \Delta s_\nu \to 0$ (y $n \to \infty$), que no depende ni del modo de la partición del arco $\overset{\smile}{AB}$ por los puntos A_ν ni de la elección de los puntos P_ν en los arcos parciales $\overset{\smile}{A_{\nu-1}A_\nu}$, entonces este límite se llama *integral curvilínea de primera especie* de la función $u(P)$ según la curva $\overset{\smile}{AB}$ y se designa mediante

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} u(P)\, ds = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} u(x, y, z)\, ds$$

(ds es la diferencial del arco), es decir,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} u(P)\, ds = \lim_{\max \Delta s_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\, \Delta s_\nu. \tag{1}$$

Si la función $u(P)$ es continua en $\overset{\smile}{AB}$, entonces la integral (1) existe.

Desde el punto de vista físico la integral (1) puede interpretarse como masa de la curva $\overset{\smile}{AB}$. El cálculo de la integral (1) se reduce al cálculo de la integral definida. Por ejemplo, si la ecuación del arco $\overset{\smile}{AB}$

tiene por expresión $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, entonces

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(P)\,ds = \int\limits_{t_0}^{t_1} u(x(t),\ y(t),\ z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$

La integral curvilínea de primera especie no depende de la dirección en la que se pasa el arco $\overset{\frown}{AB}$, en otras palabras

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(P)\,ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} u(P)\,ds.$$

EJEMPLO 1. Determínese la masa M de la primera espira de la hélice $x = a\cos t$, $y = a\operatorname{sen} t$, $z = ht$, si la densidad $\mu(P)$ en cada punto de ésta es proporcional a la longitud del radio vector de este punto.

◀Puesto que $\mu = kr = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, entonces en los puntos de la hélice $\mu = k\sqrt{a^2 + h^2t^2}$. A la primera espira corresponde la variación del parámetro t desde 0 hasta 2π y

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sqrt{a^2 + h^2}\,dt.$$

De aquí

$$M = \int\limits_0^{2\pi} k\sqrt{a^2 + h^2}\sqrt{a^2 + h^2t^2}\,dt =$$

$$= k\sqrt{a^2 + h^2}\left(\frac{t}{2}\sqrt{a^2 + h^2t^2} + \frac{a^2}{2h}\ln\left(ht + \sqrt{a^2 + h^2t^2}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= k\sqrt{a^2 + h^2}\left(\pi\sqrt{a^2 + 4\pi^2h^2} + \frac{a^2}{2h}\ln\frac{2\pi h + \sqrt{a^2 + 4\pi^2h^2}}{a}\right).$$ ▶

2.1. Hállese la masa de toda la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$, si $\mu(P) = |xy|$.

2.2. Hállese la masa de toda la cardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$, si $\mu(P) = k\sqrt{r}$.

2.3. Hállese la masa de toda la lemniscata $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, si $\mu(P) = kr$.

2.4. Calcúlese $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y}{x + 3z}\,ds$ si $\overset{\frown}{AB}$ es el arco de la línea $x = t$, $y = \frac{t^2}{\sqrt{2}}$, $z = \frac{t^3}{3}$, $A(0,\ 0,\ 0)$ y $B\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \frac{2\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.5. Hállese la masa del arco de la hélice cónica $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \operatorname{sen} t$, $z = ae^t$, si $\mu = ke^t$ desde el punto O (0, 0, 0) hasta el punto A (a, 0, a).

2.6. Hállese la fuerza con la cual la masa M distribuida uniformemente a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $z = c$, atrae la masa puntual m colocada en el origen de coordenadas.

2.7. Hállese la masa de la cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ situada en el primer cuadrante, si su densidad en cada punto de la circunferencia es proporcional a la abscisa de este punto (el coeficiente de proporcionalidad es α).

2.8. Hállese la masa de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ situada en el semiplano superior, si la densidad de esta semicircunferencia en cada punto es proporcional al cubo de la ordenada de este punto (el coeficiente de proporcionalidad es β).

2. Integral de superficie de primera especie. Sean G la superficie suave a trozos, $u(P)$, el campo escalar dado en G; $G_1, G_2, \ldots, G_n$, la partición arbitraria de la superficie G en superficies parciales cuyas áreas son iguales $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ y sean P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) puntos arbitrarios en las superficies parciales G_ν. Si existe el límite de la sucesión de las sumas integrales $\sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\,\Delta\sigma_\nu$ para $\max\limits_{\nu} \Delta\sigma_\nu \to 0$ ($n \to \infty$) que no depende ni del modo de partir la superficie G en superficies parciales ni de la elección de los puntos P_ν en estas superficies parciales, entonces este límite se llama *integral de superficie* de primera especie de la función $u(P)$ según la superficie G y se designa mediante

$$\iint_G u(P)\,d\sigma = \iint_G u(x, y, z)\,d\sigma$$

($d\sigma$ es la diferencial del área de superficie), es decir,

$$\iint_G u(P)\,d\sigma = \lim_{\max \Delta\sigma_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\,\Delta\sigma_\nu. \qquad (2)$$

Si $u(P)$ es continua en G, la integral (2) existe. El cálculo de la integral (2) se reduce al cálculo de la integral doble ordinaria. Supongamos que la recta paralela al eje Oz corta la superficie G sólo en un punto, es decir, la ecuación de la superficie tiene la forma $z = f(x, y)$ y que G se proyecta sobre el plano Oxy en el dominio D. El elemento $d\sigma_1$ del

área D se expresa en forma de $d\sigma_1 = d\sigma \cos \gamma$, donde γ es un ángulo agudo formado por la normal a la superficie G con el eje Oz:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

De este modo,

$$\iint\limits_G u(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_D u(x, y, z) \frac{d\sigma_1}{\cos \gamma} =$$

$$= \iint\limits_D u(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Si la recta paralela al eje Oz corta la superficie G en dos puntos o más, entonces G se divide en partes, cada una de las cuales se interseca con la recta paralela al eje Oz sólo en un único punto. La integración debe realizarse respecto a cada una de las partes obtenidas.

La superficie G puede proyectarse sobre los planos Oxz o Oyz, en vez de proyectarse sobre el plano Oxy.

Para las superficies de dos caras la integral de superficie de primera especie no depende de la cara por la cual se toma. El sentido físico de la integral de superficie de primera especie depende del carácter físico del campo escalar dado: éste puede determinar la masa distribuida por la superficie definida, la carga eléctrica, etc.

EJEMPLO 2. Determínense el momento estático respecto al plano Oxy y la posición del centro de masas de la semiesfera homogénea G: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(z \geqslant 0)$

◀ Tenemos

$$M_{xy} = \iint\limits_G z\, d\sigma = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

donde D es el círculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $z = 0$. Ya que en la semiesfera $x\, dx + y\, dy + z\, dz = 0$ entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

de donde

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

y

$$M_{xy} = \iint\limits_G z\, d\sigma = \iint\limits_G R\, dx\, dx = R \iint\limits_G dx\, dy = R \cdot \pi R^2 = \pi R^3.$$

Determinemos ahora las coordenadas del centro de masas de la semiesfera. En virtud de la simetría

$$x_0 = y_0 = 0.$$

Luego, ya que el área Q de la superficie de la semiesfera G es $2\pi R^2$, entonces

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{Q} = \frac{R}{2}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Por toda la superficie del cono con una altura h y un radio de la base a están distribuidas las cargas eléctricas. En cada punto de la superficie la densidad de la carga es proporcional a la z-coordenada de este punto ($\varepsilon = kz$). El vértice del cono está en el origen de las coordenadas, su eje está dirigido a lo largo del eje Oz. Determínese la carga sumaria de toda la superficie del cono.

◀ La carga sumaria de la base del cono es igual al producto de su área πa^2 por la densidad de la carga puntual, es decir, kh. Así pues, $F_b = k\pi a^2 h$. La carga de la superficie lateral G se determina por la integral

$$E_{s.l} = \iint\limits_G kz\, d\sigma.$$

La ecuación de la superficie del cono es $z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2)$, $0 \leqslant z \leqslant h$. Diferenciando hallamos $z\,dz = \frac{h^2}{a^2}(x\,dx + y\,dy)$, de donde $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h^2}{a^2}\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h^2}{a^2}\frac{y}{z}$ y por consiguiente

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{h^4}{a^4}\cdot\frac{x^2+y^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}.$$

Por eso

$$E_{s.l} = k\iint\limits_G z\, d\sigma = \frac{kh}{a}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,dx\,dy,$$

donde D es el círculo $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $z = 0$. Pasando a las coordenadas polares obtenemos

$$E_{s.l} = \frac{kh\sqrt{a^2+h^2}}{a^2}\iint\limits_D r^2\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{kh\sqrt{a^2+h^2}}{a^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2\,dr = \frac{2}{3}k\pi a h\sqrt{a^2+h^2}.$$

Hallamos toda la carga:

$$E = E_{\text{base}} + E_{s.l} = k\pi a^2 h + \frac{2}{3}k\pi a h\sqrt{a^2+h^2} =$$

$$= \frac{k\pi a h}{3}(3a + 2\sqrt{a^2+h^2}). \blacktriangleright$$

2.9. Determínese la masa distribuida en una parte de la superficie del paraboloide hiperbólico $2az = x^2 - y^2$, cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, si la densidad en cada punto de la superficie es igual a $k \mid z \mid$.

2.10. Determínese el momento de inercia de la superficie lateral homogénea del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant a)$ respecto del eje Oz.

2.11. Determínese la carga eléctrica sumaria distribuida en una parte de la superficie del hiperboloide de dos hojas $z^2 = x^2 + y^2 + a^2$ $(a \leqslant z \leqslant a\sqrt{2})$, si la densidad de la carga en cada punto es proporcional a la z-coordenada de este punto $(e = kz)$.

2.12. Determínese la masa distribuida por la superficie del cubo $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$, si la densidad superficial en el punto $P(x, y, z)$ es igual a $k\sqrt[3]{\mid xyz \mid}$ $(k = \text{const})$.

2.13. Determínese la carga eléctrica sumaria distribuida en una parte de la superficie del paraboloide $2az = x^2 + y^2$, cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, si la densidad de la carga en cada punto es igual a $k\sqrt{z}$ $(k = \text{const})$.

3. Integral curvilínea de segunda especie. Supongamos que en el arco $\overset{\frown}{AB}$ de la curva suave a trozos está definido el campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(r) = a_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ y que $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$ es una partición arbitraria del arco $\overset{\frown}{AB}$ en arcos parciales, P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ son puntos arbitrarios en los arcos $\overset{\frown}{A_{\nu-1}A_\nu}$ y Δr_ν es un incremento del radio vector $r(P)$ en los extremos del arco $\overset{\frown}{A_{\nu-1}A_\nu}$. Entonces, si existe el límite de la sucesión de las sumas integrales $\sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta r_\nu)$ para $\max\limits_{\nu} \mid \Delta r_\nu \mid \to 0$ (y $n \to \infty$) que no depende ni del modo de partir el arco $\overset{\frown}{AB}$ en arcos parciales, ni de la elección de los puntos P_ν en estos arcos parciales, este límite se llama *integral curvilínea de segunda especie* respecto al arco $\overset{\frown}{AB}$ y se designa mediante

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz,$$

es decir,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \lim_{\max\limits_{\nu} \mid \Delta r_\nu \mid \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta r_\nu). \qquad (3)$$

Aquí (a, dr) y $(a(P_v), \Delta r_v)$ son productos escalares de los vectores. Si la función vectorial $a(P)$ es continua en $\overset{\smile}{AB}$, entonces la integral (3) existe.

La integral (3) se llama también *integral lineal* del vector $a(r)$. Análogamente se definen las integrales lineales en los campos vectoriales planos y multidimensionales. Si se dan las ecuaciones paramétricas del arco $\overset{\smile}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, entonces

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (a, dr) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (a_x(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t)) z'(t)) dt. \quad (4)$$

Aquí t_0 y t_1 son valores del parámetro t correspondientes a los puntos A y B. A diferencia de las integrales curvilíneas de primera especie las integrales lineales (3) dependen de la dirección por la cual se realiza la integración a lo largo del arco $\overset{\smile}{AB}$:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{BA}} (a, dr) = -\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (a, dr).$$

El sentido físico más simple de la integral lineal es el trabajo del campo de fuerzas $a = a(r)$, cuando en éste se desplaza un punto material por la curva $\overset{\smile}{AB}$, del punto A al punto B.

EJEMPLO 4. Determínese el trabajo del campo de fuerzas $F = xi + yj + zk$, cuando el punto material se desplaza a lo largo de la primera espira de la hélice cónica $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \operatorname{sen} t$, $z = ae^t$, del punto $A(0, 0, 0)$ al punto $B(a, 0, a)$.

◀ Ya que $dx = ae^t(\cos t - \operatorname{sen} t)\, dt$, $dy = ae^t(\operatorname{sen} t + \cos t)\, dt$, $dz = ae^t dt$ y

$$(F, dr) = x\, dx + y\, dy + z\, dz = a^2 e^{2t}((\cos t - \operatorname{sen} t)\cos t + (\operatorname{sen} t + \cos t)\operatorname{sen} t + 1)\, dt = 2a^2 e^{2t} dt,$$

entonces, teniendo en cuenta que $t = -\infty$ en el punto A y $t = 0$ en el punto B, tenemos

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (F, dr) = 2a^2 \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t} dt = a^2. \blacktriangleright$$

OBSERVACIÓN. Este ejemplo se puede resolver de un modo más simple, si se toma en consideración que en este caso $(F, dr) = (r, dr) = \frac{1}{2} d(r^2)$, además $r = |r| = 0$ en el punto A y $r = a\sqrt{2}$ en el punto B. Tenemos

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (F, dr) = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{a\sqrt{2}} d(r^2) = \frac{r^2}{2}\Big|_0^{a\sqrt{2}} = a^2.$$

La integral lineal del vector $\boldsymbol{a}$, tomada por el contorno cerrado C se llama *circulación* del vector del campo por el contorno dado y se designa con el símbolo $\oint_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$. La dirección del recorrido del contorno se indica de antemano, con la particularidad de que se considera positivo el recorrido en sentido antihorario y negativo en sentido horario.

Para los campos planos vectoriales $\boldsymbol{a} = a_x(x, y)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y)\,\mathbf{j}$ tiene lugar la siguiente afirmación:

Si la función vectorial $\boldsymbol{a} = a_x(x, y)\,\boldsymbol{i} + a_i(x, y)\,\mathbf{j}$ es continua junto con las derivadas $\frac{\partial a_x}{\partial y}$ y $\frac{\partial a_y}{\partial x}$ en la región cerrada $\bar{G} = G + C$, entonces

$$\iint_G \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_C a_x\,dx + a_y\,dy$$

(*fórmula de Green*).

EJEMPLO 5. Calcúlese la integral curvilínea

$$\oint_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

◀ Aplicando la fórmula de Green podemos escribir:

$$\oint_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy = \iint_{K_C} (-1-1)\,dx\,dy = -2\pi r^2,$$

puesto que $\iint_{K_C} dx\,dy$ es el área del círculo K_C: $x^2 + y^2 \leqslant r^2$. ▶

2.14. Calcúlese el trabajo del campo de fuerzas $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$, cuando el punto material se desplaza a lo largo de la mitad superior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, del punto $A(a, 0)$ al punto $B(-a, 0)$.

2.15. Calcúlese la integral lineal $\int_{OB} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, si $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$, $O(0, 0)$, $B(1, 1)$ respecto a las líneas siguientes:

a) al segmento de la recta OB; b) al arco de la parábola $x^2 = y$; c) al arco de la parábola $y^2 = x$; d) a la quebrada OAB, donde $A(1, 0)$; e) a la quebrada OCB, donde $C(0, 1)$.

2.16. Calcúlese la circulación del vector $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ a lo largo de la circunferencia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ en sentido negativo.

2.17. Calcúlese la integral lineal $\int\limits_{\smile OA} (a, dr)$, si $a = zi + xj + yk$ y la ecuación del arco $\smile OA$ es $r = ti + t^2 j + t^3 k$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2.18. Calcúlese la integral lineal $\int\limits_{\smile OA} (a, dr)$, si $a = -yzi + xzj + xyk$, $\smile OA$ es la primera espira de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = ht$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

2.19.** Calcúlese la circulación del vector $a = zi + xj + yk$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = R$ en sentido positivo respecto al versor k.

2.20. Calcúlese la circulación del vector $a = yi - zj + xk$ a lo largo de la elipse $\frac{x^2+y^2}{2} + z^2 = a^2$, $y = x$ en dirección positiva respecto al versor i.

2.21. Calcúlese el trabajo del campo de fuerzas $F = 2xyi + y^2 j - x^2 k$, cuando el punto material se desplaza a lo largo de la sección del hiperboloide $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ por el plano $y = x$, del punto $(a, a, 0)$ al punto $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$.

Aplicando la fórmula de Green calcúlense las integrales:

2.22. $\oint\limits_C (x^2 - y^2)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$, donde C es el contorno formado por la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y el eje Ox.

2.23. $\oint\limits_C (x + y)^2\,dx - (x - y)^2\,dy$, donde C es el contorno formado por la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ y el segmento del eje Ox para $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

2.24. $\oint\limits_{x^2+y^2=r^2} x^2 y\,dx - xy^2\,dy$.

2.25. $\oint\limits_C (x + y)^2\,dx - (x^2 + y^2)\,dy$, donde C es el triángulo con vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ y $B(0, 1)$.

4. Integral de superficie de segunda especie. La superficie suave G en el espacio tridimensional se llama *de dos caras*, si la normal a la superficie, al recorrer cualquier contorno cerrado que se encuentra sobre la superficie G y que no tiene puntos comunes con su frontera,

retorna a la posición inicial. La elección de una cara determinada de la superficie, es decir, la elección de la dirección de la normal hacia la superficie se llama *orientación* de la superficie.

Sea G la superficie orientada suave a trozos y $\boldsymbol{a} = a_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$, el campo vectorial. Dividamos la superficie G en superficies parciales $G_1, G_2, \ldots, G_n$, cuyas áreas designamos mediante $\Delta\sigma_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) y las áreas de las superficies parciales G_ν, provistas de normales unitarias $\boldsymbol{n}_\nu(P_\nu)$ en los puntos $P_\nu \in G$, la denotamos por $\Delta\sigma_\nu$ (es decir, consideramos cada área de tal índole como un vector de longitud $\Delta\sigma_\nu$ y de dirección $\boldsymbol{n}_\nu(P_\nu)$). Pues, si existe el límite de la sucesión de sumas integrales $\sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\sigma_\nu)$ para $\max_\nu \Delta\sigma_\nu \to 0$ ($n \to \infty$), el cual no depende ni del modo de partir la superficie G en superficies parciales, ni de la elección de los puntos P_ν en estas superficies parciales, entonces este límite se llama *integral de superficie de segunda especie* respecto a la superficie G y se designa mediante

$$\iint_G (\boldsymbol{a},\, d\sigma) = \iint_G a_x\,dy\,dz + a_y\,dx\,dz + a_z\,dx\,dy, \tag{5}$$

es decir,

$$\iint_G (\boldsymbol{a},\, d\sigma) = \lim_{\max_\nu \Delta\sigma_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu),\, \Delta\sigma_\nu).$$

Si el campo $\boldsymbol{a}(P)$ es continuo en G, la integral (5) existe.

La integral de superficie de segunda especie se llama también *flujo* del campo vectorial $\boldsymbol{a}(P)$ a través de la superficie G. Puede ser interpretada como la cantidad de líquido o gas que pasa por unidad de tiempo en la dirección dada a través de la superficie G. El paso a otra cara de la superficie cambia la dirección de la normal hacia la superficie y por eso, también el signo de la integral de superficie de segunda especie.

El cálculo de la integral de superficie de segundo género se reduce al cálculo de la integral de superficie de primer género

$$\iint_G (\boldsymbol{a},\, d\sigma) = \iint_G (\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{n})\,d\sigma = \iint_G (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\,d\sigma \tag{6}$$

donde $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ es la normal unitaria a la superficie, o al cálculo de la suma de tres integrales dobles

$$\iint_G (\boldsymbol{a},\, d\sigma) = \iint_{D_1} a_x(x(y, z), y, z)\,dy\,dz +$$

$$+ \iint_{D_2} a_y(x, y(x, z), z)\,dx\,dz + \iint_{D_3} a_z(x, y, z(x, y))\,dx\,dy,$$

donde D_1, D_2 y D_3 son las proyecciones de G respectivamente sobre los planos Oyz, Oxz y Oxy, y x (y, z), y (x, z) y z (x, y) son las expresiones obtenidas de la ecuación de la superficie G resolviendo respecto a las coordenadas correspondientes.

EJEMPLO 6. Hállese el flujo del vector $r = xi + yj + zk$ a través de una parte de la superficie del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ situada en el primer octante, en dirección de la normal exterior.

◀ En virtud de (6) tenemos

$$\iint\limits_G (r,\ n)\, d\sigma = \iint (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, d\sigma.$$

Puesto que en el primer octante la normal exterior del elipsoide forma con todos los ejes de coordenadas ángulos agudos, todos los tres cosenos directores son no negativos. Por eso

$$\iint\limits_G (r,\ n)\, d\sigma = \iint\limits_{D_1} x\, dy\, dz + \iint\limits_{D_2} y\, dx\, dz + \iint\limits_{D_3} z\, dx\, dy =$$

$$= 3v = 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi abc = \frac{\pi abc}{2}$$

(cada una de las integrales respecto a D_1, D_2 y D_3 determina el volumen de una octava parte del elipsoide). ▶

EJEMPLO 7. Hállese el flujo del vector $a = x^2 i - y^2 j + z^2 k$ a través de toda la superficie del cuerpo $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3R^2$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ en dirección de la normal exterior.

▶ Tenemos

$$\iint\limits_G (a,\ n)\, d\sigma = \iint\limits_G (x^2\cos\alpha - y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, d\sigma =$$

$$= \iint\limits_G x^2\cos\alpha\, d\sigma - \iint\limits_G y^2\cos\beta\, d\sigma + \iint\limits_G z^2\cos\gamma\, d\sigma.$$

La superficie dada está limitada por arriba por el segmento de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$; por los lados, por parte de la superficie del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$; por abajo por el círculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $z = 0$ (fig. 93). Sobre los planos Oyz y Oxz la superficie G se proyecta dos veces por distintas caras, por eso, en virtud de la simetría de la superficie respecto a estos planos, las dos primeras integrales en la notación del flujo son iguales a cero:

$$\iint\limits_G x^2\cos\alpha\, d\sigma = \iint\limits_G y^2\cos\beta\, d\sigma = 0.$$

Sobre el plano Oxy el segmento esférico se proyecta en el círculo (dominio D_3') $x^2 + y^2 \leqslant 2R^2$; parte de la superficie del hiperboloide, en el anillo (dominio D_3'') $R^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2R^2$ y de base inferior sirve el círculo situado en este plano, (dominio D_3''') $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. No

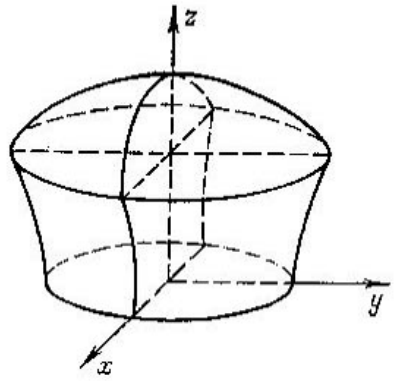


Fig. 93

obstante, para el segmento de la esfera $\cos\gamma > 0$, para el hiperboloide $\cos\gamma < 0$ y en la base inferior $z = 0$. Por eso

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\, d\sigma = \iint\limits_G z^2 \cos\gamma\, d\sigma = \iint\limits_{D_3'} (3R^2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy - \iint\limits_{D_2'} (x^2 + y^2 - R^2)\, dx\, dy.$$

Para calcular las integrales pasemos a las coordenadas polares

$$\iint\limits_{D_3'} (3R^2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{2}} (3R^2 - r^2)\, r\, dr = 4\pi R^4,$$

$$\iint\limits_{D_3''} (x^2 + y^2 - R^2)\, dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_R^{R\sqrt{2}} (r^2 - R^2)\, r\, dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Así pues, definitivamente hallamos: $\iint\limits_G (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\, d\sigma = \frac{7}{2}\pi R^4$. ▶

2.26. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a través de la superficie del cuerpo $\frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant H$ en dirección de la normal exterior.

2.27. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ a través de una parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$,

$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant H$, en dirección de la normal exterior.

2.28. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ a través de una parte de la superficie del paraboloide $\frac{H}{R^2}(x^2 + y^2) \quad z$, $z \leqslant H$, en dirección de la normal interior.

2.29. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ a través de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, en dirección de la normal exterior.

2.30. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cubo $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$ en dirección de la normal exterior.

2.31. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = 2x^2\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cuerpo $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}$ en dirección de la normal exterior.

2.32. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a través de una parte de la superficie del paraboloide $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, cortada por los planos $x = R$, $z = 0$, $x = 0$ y orientada según la dirección del versor $\boldsymbol{k}$.

2.33. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a través de una parte de la superficie del paraboloide $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y orientada según la dirección del versor k.

§ 3. Relaciones entre las distintas características de los campos escalares y vectoriales

1. **Divergencia del campo vectorial y el teorema de Gauss—Ostrogradski.** Se llama *divergencia* del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(r)$, designada por div $\boldsymbol{a}$, la magnitud escalar igual al límite de la razón entre el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a}$ a través de la superficie cerrada $\sum_P$ y la magnitud v_P del volumen del cuerpo limitado por esta superficie, para $v_P \to 0$, es decir, a condición de que la superficie se concentre en el punto P.

$$\iint_{\sum_P} (\boldsymbol{a}, d\sigma)$$

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{a})_P = \lim_{v_P \to 0} \frac{\sum_P}{v_P}. \qquad (1)$$

La divergencia caracteriza la potencia del flujo del campo vectorial «saliente» del punto P, referida a una unidad de volumen, es decir, la potencia del manantial (para $(\operatorname{div} \boldsymbol{a})_P > 0$) o del sumidero (para $(\operatorname{div} \boldsymbol{a})_P < 0$) que se encuentra en el punto P.

En el espacio euclídeo tridimensional la divergencia del campo se expresa del modo siguiente:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

TEOREMA DE GAUSS—OSTROGRADSKI. *El flujo del campo vectorial* $\boldsymbol{a}(r)$ *a través de una superficie cerrada* $\sum$, *situada en este campo en dirección de su normal exterior, es igual a la integral triple de la divergencia de este campo vectorial sobre el recinto* V, *limitado por esta superficie, es decir,*

$$\oiint_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})\, d\sigma = \iiint_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dv.$$

EJEMPLO 1. Empleando el teorema de Gauss—Ostrogradski hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^3 i + y^3 j + R^2 z k$ a través de toda la superficie del cuerpo $\frac{H}{R^2}(x^2 + y^2) \leqslant z \leqslant H$ en dirección de la normal exterior.

◀ Tenemos $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 3(x^2 + y^2) + R^2$. Por eso

$$\oiint_{G} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, d\sigma = \iiint_{v} (3(x^2 + y^2 (+ R^2)\, dv.$$

Para calcular la integral triple pasemos a las coordenadas cilíndricas. La ecuación de la superficie tomará la forma $z = \frac{H}{R^2} r^2$,

$$\iiint_{v} (3(x^2 + y^2) + R^2)\, dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} (3r^2 + R^2)\, r\, dr \times$$

$$\times \int_{\frac{Hr^2}{R^2}}^{H} dz = 2\pi \int_0^{R} (3r^2 + R^2) \left(H - \frac{Hr^2}{R^2} \right) r\, dr =$$

$$= \frac{2\pi H}{R^2} \int_0^{R} (R^4 + 2R^2 r^2 - 3r^4)\, r\, dr = \pi H R^4. \blacktriangleright$$

Empleando el teorema de Gauss — Ostrogradski resuélvanse los problemas siguientes:

3.1. Demuéstrese que el flujo del radio vector r a través de cualquier superficie cerrada suave a trozos en dirección

de la normal exterior es igual al volumen triplicado del cuerpo, limitado por esta superficie.

3.2. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} - z^3\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cubo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$ $0 \leqslant z \leqslant a$ en dirección de la normal exterior.

3.3. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/r$ a través de toda la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en dirección de la normal exterior.

3.4*. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ dirigido en el sentido negativo del eje Ox a través de la superficie de una parte del paraboloide $y^2 + z^2 = Rx$ que se corta por el plano $x = R$.

3.5. Extiéndase el concepto de flujo y de divergencia en el caso de un campo plano (bidimensional) y formúlese el teorema de Gauss — Ostrogradski para este caso.

3.6*. Utilizando la solución del problema anterior, transfórmese la circulación del vector por un contorno cerrado L en un campo plano, en la integral doble sobre el área limitada por este contorno.

3.7. Con ayuda del teorema de Gauss — Ostrogradski hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cuerpo $x^2 + y^2 - z^2 \leqslant R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ en dirección de la normal exterior.

3.8. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2y\boldsymbol{i} - xy^2\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\,z\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cuerpo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$ en dirección de la normal exterior.

2. Rotor del campo vectorial. Teorema de Stokes. Se llama *rotor* del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(r)$, designado por rot $\boldsymbol{a}$, el vector que en todo punto P de la diferenciabilidad del campo se determina del modo siguiente:

$$(\text{proyecc}_s \text{ rot } \boldsymbol{a})_P = \lim_{\sigma_P \to 0} \frac{\oint_{l_P} (\boldsymbol{a},\, d\boldsymbol{r})}{\sigma_P}.$$

Aquí s es el vector unitario de la dirección arbitraria, l_P es el contorno cerrado menor, que rodea el punto P, situado en el plano perpendicular al vector s y recorrido en el sentido positivo con respecto al vector s; σ_P es el área del recinto limitado por el contorno l_P: el límite se busca a condición de que el contorno se contrae en el punto P. En el espacio tridimensional rot $\boldsymbol{a}$ se expresa mediante las coordenadas

rectangulares cartesianas del vector $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ del modo siguiente:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

TEOREMA DE STOKES. *La circulación de un campo vectorial diferenciable* $\boldsymbol{a}$ *por un contorno arbitrario cerrado suave a trozos* L, *es igual al flujo del vector rot* $\boldsymbol{a}$ *a través de la superficie* G, *limitada por este contorno* L:

$$\oint_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \iint_G (\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{\sigma})$$

o en la forma coordenada

$$\oint_L (a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz) = \iint_G \left(\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) d\sigma.$$

En este caso el vector unitario $\boldsymbol{n}$ de la normal a la superficie G está dirigido de tal modo para que el contorno L se recorra en el sentido positivo respecto a $\boldsymbol{n}$.

EJEMPLO 2. Compruébese la respuesta al problema 2.19 del capítulo presente con ayuda del teorema de Stokes.

◀ Puesto que $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, entonces $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Tomemos como superficie G limitada por el contorno L, el propio círculo formado como resultado de la sección de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ por el plano $x + y + z = R$. El centro del círculo es $O'\left(\frac{R}{3}, \frac{R}{3}, \frac{R}{3}\right)$; su radio es $R_1 = R\sqrt{\frac{2}{3}}$. El vector unitario de la normal es $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$.

Por cuanto $(\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, hallamos

$$\oint_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \iint_G (\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,d\sigma = \sqrt{3}\iint_G d\sigma = \sqrt{3}\,\pi R_1^2 = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}. \blacktriangleright$$

Ejemplo 3. Hállese la circulación del vector $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - 2z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ a lo largo de la elipse formada como resultado de la sección del hiperboloide $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ por el plano $y = x$, en el sentido positivo respecto al versor $\boldsymbol{i}$. Verifíquese la respuesta con ayuda del teorema de Stokes.

◀ Las ecuaciones paramétricas de la elipse dada son $x = R\cos t$, $y = R\cos t$, $z = R\operatorname{sen} t$. Para recorrer en una dirección determinada hay que variar el parámetro t desde 0 hasta 2π. Por consiguiente

$$\oint_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int_L y\,dx - 2z\,dy + x\,dz = R^2 \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t\cos t + 2\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = 3\pi R^2.$$

Apliquemos el teorema de Stokes. Tenemos $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. De superficie G limitada por el contorno L nos servirá una parte del plano secante, situada dentro de la elipse. El vector unitario de la normal dirigido en sentido necesario tiene la forma $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$.

Por eso, $(\operatorname{rot} \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ y

$$\iint_G (\operatorname{rot} \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,d\sigma = \frac{3}{\sqrt{2}} \iint_G d\sigma = \frac{3}{\sqrt{2}}\pi ab.$$

Ya que la elipse tiene semiejes $a = R\sqrt{2}$ y $b = R$, entonces

$$\iint_G (\operatorname{rot} \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,d\sigma = 3\pi R^2. \blacktriangleright$$

3.9*. El medio líquido gira con una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k}$ alrededor del eje que pasa por el origen de coordenadas. Hállese el rotor del campo de velocidades de este medio.

3.10. Dedúzcase la fórmula de Green (véase la respuesta al problema 3.6) aplicando el teorema de Stokes al campo vectorial bidimensional $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j}$.

3.11. Empleando la fórmula de Green erciórese de que el área Q del dominio plano D, limitado por el contorno suave a trozos L, pude hallarse con ayuda de cualquiera de los tres integrales siguientes:

$$Q = \oint_L x\,dy, \quad Q = -\oint_L y\,dx, \quad Q = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx.$$

3.12. Utilizando la última fórmula del problema anterior hállese el área de las figuras, limitadas por las curvas siguientes:

a) por el bucle del folio de Decartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

b) por la evoluta de la elipse $x = \frac{a^2}{c}\cos^3 t$, $y = \frac{b^2}{c}\operatorname{sen}^3 t$ (a y b son semiejes de la elipse, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$)

3.13. Aplicando el teorema de Stokes hállese la circulación del vector $\boldsymbol{a} = z^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$ por la sección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ producida por el plano $x + y + z = R$ en el sentido positivo respecto al versor $\boldsymbol{k}$.

3.14. Hállese la circulación del vector $\boldsymbol{a} = z^3\boldsymbol{i} + x^3\boldsymbol{j} + y^3\boldsymbol{k}$ por la sección del hiperboloide $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ producida por el plano $x + y = 0$ en el sentido positivo respecto al versor $\boldsymbol{i}$. Verifíquese aplicando el teorema de Stokes.

3.15. Hállese la circulación del vector $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$ a lo largo del contorno cortado en el primer octante del paraboloide $x^2 + y^2 = Rz$ por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = R$, en dirección positiva respecto a la normal exterior del paraboloide. Verifíquese con ayuda del teorema de Stokes.

3. Operador de Hamilton y su aplicación. Todas las operaciones del análisis vectorial pueden ser expresadas aplicando el operador de Hamilton, vector simbólico ∇ (se lee: nabla), definido por la igualdad

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Empleando las operaciones conocidas de multiplicación del vector por el escalar, del producto escalar y vectorial de dos vectores, hallamos:

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\boldsymbol{s},\ \operatorname{grad} u) = (\boldsymbol{s},\ \nabla u) = (\boldsymbol{s},\ \nabla)\, u;$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = (\nabla,\ \boldsymbol{a});$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = [\nabla,\ \boldsymbol{a}].$$

Por analogía con la derivada en dirección de la función escalar $\dfrac{\partial n}{\partial s}$, se introduce el concepto de derivada en dirección del vector unitario

s de la función vectorial $a(r)$. Precisamente,

$$\frac{\partial a}{\partial s} = (s, \nabla) a = i (s, \operatorname{grad} a_x) + j (s, \operatorname{grad} a_y) +$$

$$+ k (s, \operatorname{grad} a_z) = \frac{\partial a_x}{\partial s} i + \frac{\partial a_y}{\partial s} j + \frac{\partial a_z}{\partial s} k.$$

Las derivadas en dirección de cualquier vector arbitrario c (no unitario) se diferencian de las derivadas en dirección del vector unitario sólo en que en ellas entra el factor escalar complementario $|c|$:

$$(c, \nabla) u = (c, \operatorname{grad} u),$$

$(c, \nabla) a = (c, \operatorname{grad} a_x) i + (c, \operatorname{grad} a_y) j + (c, \operatorname{grad} a_z) k$.

Con ayuda del operador de Hamilton es cómodo realizar las operaciones diferenciales del análisis vectorial sobre las expresiones complejas (el producto de dos y más funciones escalares, el producto de la función escalar por el vector, los productos escalar y vectorial de los vectores, etc.). Es necesario recordar sólo que es un operador de diferenciación, y no olvidar la regla de diferenciación del producto.

EJEMPLO 4. Hállese el gradiente del producto de dos funciones escalares u y v.

◀ Tenemos

$$\operatorname{grad}(uv) = \nabla(uv) = \nabla(\overset{\downarrow}{u}v) + \nabla(u\overset{\downarrow}{v})$$

(la flecha indica la función sobre la cual «actúa» el operador). Pero

$$\nabla(\overset{\downarrow}{u}v) = v \nabla u = v \operatorname{grad} u,$$
$$\nabla(u\overset{\downarrow}{v}) = u \nabla v = u \operatorname{grad} v.$$

De este modo,

$$\operatorname{grad} uv = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 5. Hállese el rot $[a, c]$, donde c es vector constante.

◀ Puesto que según la fórmula conocida del álgebra vectorial $[a, [b, c]] = (a, c) b - (a, b) c$, entonces, considerando la relación $[\nabla, [a, c]] = 0$, tenemos

$$\operatorname{rot}[a, c] = [\nabla, [a, c]] = [\nabla, [\overset{\downarrow}{a}, c]] + [\nabla, [a, \overset{\downarrow}{c}]] = (\nabla, c)\overset{\downarrow}{a} - (\nabla, \overset{\downarrow}{a}) c.$$

Pero $(\nabla, c)\overset{\downarrow}{a} = (c, \nabla)\overset{\downarrow}{a}$, lo que es la derivada del vector a en dirección del vector c. Luego,

$$(\nabla, a) c = c (\nabla, a) = c \operatorname{div} a.$$

De este modo, $\operatorname{rot}[a, c] = (c, \nabla) a - c \operatorname{div} a$.

Realícense las siguientes operaciones diferenciales (aquí y más abajo, en los problemas de este párrafo, c es un vector constante, a y b son vectores variables):

3.16. Hállense $\operatorname{div}(cu)$ y $\operatorname{div}(au)$.

3.17.** Hállense $\operatorname{grad}(a, c)$ y $\operatorname{grad}(a, b)$.

3.18. Hállense div $[a, c]$ y div $[a, b]$.

3.19*. Hállense rot (cu), rot (au) y rot $[a, b]$.

4. Operaciones diferenciales de segundo orden. Se puede realizar cinco operaciones diferenciales de segundo orden:

1) div grad $u = (\nabla, \nabla) u = \nabla^2 u = \nabla u$ (laplaciano de la función);

2) rot grad $u = [\nabla, \nabla] u$;

3) grad div $a = \nabla (\nabla, a)$;

4) div rot $a = (\nabla, [\nabla, a])$;

5) rot rot $a = [\nabla, [\nabla, a]]$.

Además, se puede aplicar la operación ∇^2 también a los campos vectoriales, es decir, analizar la operación $\nabla^2 a$.

Las operaciones segunda y cuarta llevan al cero:

$$\text{rot grad } u = [\nabla, \nabla] u \equiv 0, \quad \text{div rot } a = (\nabla, [\nabla, a]) \equiv 0.$$

Esto deriva del sentido vectorial del operador ∇: en el primer caso tenemos formalmente el producto vectorial de dos vectores colineales, en el segundo, el producto mixto de vectores coplanares.

3.20. Obténganse las expresiones para

$$\text{div grad } u = \nabla^2 u,$$

$$\text{grad div } a = \nabla (\nabla, a),$$

$$\text{rot rot } a = [\nabla [\nabla, a]],$$

$$\nabla^2 a = \nabla^2 a_x i + \nabla^2 a_y j + \nabla^2 a_z k$$

a partir de las derivadas de los campos escalar o vectorial.

3.21. Hállese grad div a, si $a = x^3 i + y^3 j + z^3 k$.

3.22. Hállese rot rot a, si $a = xy^2 i + yz^2 j + zx^2 k$.

3.23. Hállese $\nabla^2 a$, si $a = (y^2 + z^2) xi + (x^2 + z^2) yj + (x^2 + y^2) zk$.

3.24. Hállese div grad (uv).

3.25. Hállese grad div (uc) y grad div (ua) (c es un vector constante, a es un vector variable).

3.26. Hállese rot rot (uc).

§ 4. Tipos especiales de campos vectoriales

1. Campo vectorial potencial. El campo vectorial $a = a(r)$ se llama *potencial* si el vector del campo a es el gradiente de una función escalar $u = u(P)$:

$$a(r) = \text{grad } u(P). \tag{1}$$

La función $u(P)$ se denomina, en este caso, *potencial* del campo vectorial. La condición necesaria y suficiente de potencialidad del campo

$\boldsymbol{a}(r)$ dos veces diferenciable en la región simplemente conexa, es la igualdad a cero del rotor de este campo:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0. \tag{2}$$

EJEMPLO 1. Verifíquese que el rotor del campo vectorial tridimensional $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$, sea idénticamente igual a cero (la función $u(P)$ se supone dos veces diferenciable).

◀ Ya que $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$, entonces, tomando en consideración la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden, obtenemos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\boldsymbol{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)\boldsymbol{k} \equiv 0. \blacktriangleright$$

En el punto 4 del párrafo anterior esta igualdad fue obtenida utilizando las propiedades del vector simbólico nabla.

El campo potencial posee las siguientes propiedades.

1. En la región donde el potencial del campo es continuo la integral lineal del vector del campo, tomada entre dos puntos del campo, no depende del camino de la integración y es igual a la diferencia de valores del potencial del campo al final y al principio del camino de integración

$$\int_A^B (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int_A^B (\operatorname{grad} u,\ d\boldsymbol{r}) = \int_A^B du = u(B) - u(A) \tag{3}$$

(se aplica la fórmula $(\operatorname{grad} u,\ d\boldsymbol{r}) = du$ fácil de comprobar).

2. La circulación del vector del campo a lo largo de cualquier contorno cerrado, situado por completo en la región de continuidad del campo, es igual a cero.

3. Si el campo $\boldsymbol{a}$ es potencial, entonces el potencial del campo $u(P)$ en un punto arbitrario P puede ser calculado según la fórmula (3):

$$u(P) = \int_A^P (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) + C, \tag{4}$$

además $C = u(A)$, lo que es fácil de obtener sustituyendo en (4) el punto fijo A, en vez del punto variable P.

Para calcular la integral (4) se puede escoger cualquier camino: como camino se escoge simplemente una quebrada, cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas, que une los puntos A y P. Como punto A es cómodo tomar el origen de coordenadas (si este está en la región de continuidad del campo).

Ejemplo 2. Hállese el potencial del campo $a = 2xyi + (x^2 - 2yz)j - y^2k$.

◀ Cerciorémonos de que el campo es potencial

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z} = -2y, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y} = 2x.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{rot} a = 0.$$

Como camino de integración tomemos la quebrada $OABP$, donde $O(0, 0, 0)$, $A(X, 0, 0)$, $B(X, Y, 0)$, $P(X, Y, Z)$. Hallamos

$$u(X, Y, Z) = \int_{OABP} (a, dr) + C = \int_0^A (a, dr) + \int_A^B (a, dr) +$$

$$+ \int_B^P (a, dr) + C,$$

$$(a, dr) = 2xy\,dx + (x^2 - 2yz)\,dy - y^2\,dz.$$

Puesto que en OA tenemos $y = z = 0$, $dy = dz = 0$, $0 \leqslant x \leqslant X$, entonces

$$\int_0^A (a, dr) = 0.$$

Análogamente en AB tenemos $x = X$, $dx = 0$, $z = 0$, $dz = 0$, $0 \leqslant y \leqslant Y$, por eso

$$\int_A^B (a, dr) = \int_0^Y X^2\,dy = X^2Y.$$

En BP tenemos $x = X$, $y = Y$, $dx = dy = 0$, $0 \leqslant z \leqslant Z$, lo que significa

$$\int_B^P (a, dr) = -\int_0^Z Y^2\,dz = -Y^2Z.$$

Así pues, $u(X, Y, Z) = X^2Y - Y^2Z + C$. Volviendo a las variables x, y, z, obtenemos

$$u(P) = x^2y - y^2z + C. \blacktriangleright$$

OBSERVACIÓN. El método expuesto para determinar el potencial del campo se emplea para resolver los problemas del análisis matemático equivalentes al problema examinado, tales como la reconstrucción de una función de dos, tres y n variables a partir de sus diferenciales totales, así como para integrar las ecuaciones diferenciales en diferenciales totales.

Hállense los potenciales de los siguientes campos planos y tridimensionales:

4.1. $\boldsymbol{a} = (3x^2y - y^3)\,\boldsymbol{i} + (x^3 - 3xy^2)\,\boldsymbol{j}$.

4.2. $\boldsymbol{a} = \dfrac{\operatorname{sen} 2x \cos 2y\,\boldsymbol{i} + \cos 2x \operatorname{sen} 2y\,\boldsymbol{j}}{\sqrt{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 x \cos^2 y}}$.

4.3. $\boldsymbol{a} = (yz - xy)\,\boldsymbol{i} + \left(xz - \dfrac{x^2}{2} + yz^2\right)\boldsymbol{j} + (xy + y^2 z)\,\boldsymbol{k}$.

4.4*. $\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{z^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2}\right)\boldsymbol{k}$.

4.5*. $\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{z}{y^2} - \dfrac{y}{z^2} - \dfrac{2yz}{x^3}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{x}{z^2} - \dfrac{2xz}{y^3}\right)\boldsymbol{j} +$

$+ \left(\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{2xy}{z^3}\right)\boldsymbol{k}$.

4.6**. Demuéstrese que en el campo vectorial potencial siempre continuo las líneas vectoriales no pueden ser cerradas.

Si en el campo potencial plano existen puntos en los cuales el campo pierde su propiedad de continuidad (los así llamados puntos *singulares*), entonces la circulación a lo largo del contorno cerrado que rodea tal punto puede ser distinta de cero. En este caso la circulación a lo largo del contorno que recorre un punto singular dado una vez, en sentido positivo, no depende de la forma del contorno y se llama *constante cíclica* respecto al punto singular dado.

Propiedades análogas las tienen los campos tridimensionales con líneas singulares a lo largo de las cuales el campo pierde su propiedad de continuidad.

4.7. Cerciórese de que el campo $\boldsymbol{a} = \dfrac{x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{i}}{x^2 + y^2}$ es potencial. Determínense su punto singular y su constante cíclica.

4.8*. Demuéstrese la propiedad formulada más arriba de que la circulación a lo largo del contorno cerrado, que rodea el punto singular, no depende de la forma del contorno.

4.9*. Valiéndose de la fórmula (4) para determinar el potencial del campo, cerciórese de que el potencial del campo plano, que contiene puntos singulares, es una función multiforme.

2. **Campo solenoidal.** Un campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(r)$ se llama *solenoidal*, si la divergencia de este campo es igual a cero: $\operatorname{div} \boldsymbol{a} \equiv 0$.

Para un campo tridimensional esta condición puede anotarse así:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv 0. \qquad (5)$$

En tal campo, en virtud del teorema de Gauss—Ostrogradski, el flujo del vector del campo a través de cualquier superficie cerrada es

igual a cero. Puede haber una sola exclusión cuando en tal campo existen puntos singulares (en los cuales el vector del campo no está definido y la divergencia del campo, si se determina en este punto con ayuda de la fórmula (1) del § 3, es distinta de cero). En este caso el flujo a través de la superficie cerrada puede ser diferente de cero, pero tendrá el mismo valor para todas las superficies cerradas que rodean el grupo dado de puntos singulares.

EJEMPLO 3. Demuéstrese que para todo campo vectorial tridimensional dos veces diferenciable $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(r)$ el campo de rotores es solenoidal.

◀ Tenemos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \boldsymbol{k}.$$

Considerando la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden, obtenemos

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = 0. \blacktriangleright$$

En el punto 4 del párrafo antecedente esta relación ha sido demostrada con ayuda del operador nabla.

4.10. Demuéstrese que en el campo solenoidal el flujo del vector a través de la superficie cerrada, que no contiene dentro puntos singulares, es igual a cero.

Verifíquese si son solenoidales los campos siguientes:

4.11. $\boldsymbol{a} = (x^2y + y^3)\,\boldsymbol{i} + (x^3 - xy^2)\,\boldsymbol{j}$.

4.12. $\boldsymbol{a} = xy^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} - (x^2 + y^2)\,z\boldsymbol{k}$.

4.13. $\boldsymbol{a} = \frac{x}{yz}\,\boldsymbol{i} + \frac{y}{xz}\,\boldsymbol{j} - \frac{(x+y)\ln z}{xy}\,\boldsymbol{k}$

4.14. $\boldsymbol{a} = \frac{x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{(x^2-y^2)\,z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

4.15*. Demuéstrese que en el campo solenoidal el flujo del vector del campo a través de la sección transversal de cualquier tubo vectorial (que está determinado en el mismo sentido) tiene valor constante.

3. Campo laplaciano (o armónico). El campo vectorial se llama *laplaciano* (o *armónico*) si es al mismo tiempo potencial y solenoidal, es decir, si

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0. \tag{6}$$

EJEMPLO 4. Demuéstrese que el potencial u del campo laplaciano bidimensional o tridimensional es *una función armónica* de

dos o tres variables (es decir, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ó $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

◀ En efecto, tenemos

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

para dos variables,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

para tres variables. ▶

EJEMPLO 5. Muéstrese que el potencial del campo de las fuerzas de gravitación, que surge en el espacio que rodea cierta masa puntual, es igual a k/r (k es constante) y que el campo de las fuerzas de gravitación es laplaciano.

◀ Coloquemos el origen de coordenadas en el centro de atracción. Entonces

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \frac{k}{r} = k \operatorname{grad} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -k \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{k\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Pero éste es un vector de la fuerza de atracción. Efectivamente, está dirigido hacia el centro de atracción, puesto que $r\,r$ es un vector unitario del radio vector del punto P (r) dirigido hacia el origen de coordenadas y su módulo es igual a k/r^2, es decir, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de atracción. Mostremos que $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = -k \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$. Tenemos

$$a_x = -\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = -k \frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = -k \frac{y^2+z^2-2x^2}{r^5}.$$

Análogamente

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = -k \frac{x^2+z^2-2y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = -k \frac{x^2+y^2-2z^2}{r^5},$$

y por eso,

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z} = -\frac{k}{r^5}((y^2+z^2-2x^2)+$$
$$+(x^2+z^2-2y^2)+(x^2+y^2-2z^2)) = 0.$$

Así pues, el campo de las fuerzas de gravitación es laplaciano. ▶

4.16. Demuéstrese que el campo vectorial plano, de cuyo potencial sirve la función $u = \ln r$ ($r = \sqrt{x^2+y^2}$), es laplaciano.

4.17*. Para las funciones armónicas u y w en la región G demuéstrense las siguientes *fórmulas de Green*:

a) $$\iint\limits_S u \frac{\partial w}{\partial n} d\sigma = \iiint\limits_G (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} w)\, dv$$

(la primera fórmula de Green),

b) $$\iint\limits_S \left(u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 0$$

(la segunda fórmula de Green),

c) $$\iint\limits_S \frac{\partial (uw)}{\partial n} d\sigma = 2 \iiint\limits_G (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} w)\, dv$$

(la tercera fórmula de Green).

4.18. Verifíquese si son armónicas las siguientes funciones:

a) $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

b) $u = r - x = \sqrt{x^2+y^2} - x$;

c) $u = Ax + By + C$;

d) $u = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$;

e) $u = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$;

f) $u = Ax + By + Cz + D$;

g) $u = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$;

h) $u = a_{111}x^3 + a_{222}y^3 + a_{333}z^3 + 3a_{112}x^2y + 3a_{113}x^2z + 3a_{122}xy^2 + 3a_{223}y^2z + 3a_{133}xz^2 + 3a_{233}yz^2 + 6a_{123}xyz$.

§ 5. Aplicación de las coordenadas curvilíneas al análisis vectorial

1. Coordenadas curvilíneas. Relaciones principales. En el espacio el sistema de coordenadas está definido, si a todo punto P están puestos en correspondencia tres números q_1, q_2, q_3, además, a cada tres números distintos corresponden distintos puntos del espacio. Los números q_1, q_2, q_3 se llaman *coordenadas* (o *coordenadas curvilíneas*) del punto $P = P(q_1, q_2, q_3)$. Son de mayor aplicación los sistemas de coordenadas siguientes:

1) Sistema de coordenadas rectangular cartesiano. Aquí $q_1 = x$ es la abscisa del punto P, $q_2 = y$ es la ordenada y $q_3 = z$ es z-coordenada.

2) Sistema de coordenadas cilíndrico. En este sistema por q_1 se toma la distancia r del punto P al eje z, $q_1 = r$ $(0 \leqslant r < \infty)$, $q_2 = \varphi$ es el ángulo formado por la proyección del radio vector OP sobre el plano Oxy con sentido positivo del eje Ox $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ y $q_3 = z$ es z-coordenada del punto P.

En este caso las coordenadas cilíndricas están relacionadas con las coordenadas rectangulares cartesianas mediante las fórmulas

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\operatorname{sen}\varphi,\quad z = z$$

y recíprocamente

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

3) Sistema esférico de coordenadas. Aquí $q_1 = r$ es la longitud del radio vector del punto P $(0 \leqslant r < \infty)$, $q_2 = 0$ es el ángulo entre el sentido positivo del eje Oz y el radio vector OP del punto P $(0 \leqslant 0 \leqslant \pi)$[1]. $q_3 = \varphi$ es ángulo entre el sentido positivo del eje Ox y la proyección del radio vector OP sobre el plano Oxy $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$. Tienen lugar las fórmulas:

$$x = r\operatorname{sen}0\cos\varphi,$$
$$y = r\operatorname{sen}0\operatorname{sen}\varphi,$$
$$z = r\cos 0$$

y recíprocamente

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$\cos 0 = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

La línea a lo largo de la cual varía sólo una coordenada q_1 se llama *q_1-línea coordenada* y el vector unitario tangente a esta línea y dirigido en el sentido en que crece q_1, se llama *versor unitario coordenado* e_{q_1} en el punto $P(q_1^0, q_2^0, q_3^0)$. De modo análogo se definen q_2- y q_3- líneas y los versores unitarios e_{q_2} y e_{q_3}.

Si los vectores e_{q_1}, e_{q_2}, e_{q_3}, son ortogonales dos a dos en todo punto del espacio, entonces el correspondiente sistema de coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 se denomina *ortogonal*.

Supongamos que $P(q_1, q_2, q_3)$ es un punto arbitrario del espacio, $P_1(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)$ es un punto situado en la q_1-línea del punto P y $|\widetilde{PP_1}|$ es la longitud del arco $\widetilde{PP_1}$. Entonces el número

$$L_1 = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{|\widetilde{PP_1}|}{\Delta q_1}$$

[1] A veces por la coordenada q_2 del sistema esférico se toma el ángulo entre el radio vector OP y el plano Oxy (véase el § 2, cap. 8).

lleva el nombre de *coeficiente de Lamé* de la coordenada q_1 en el punto P. De modo análogo se determinan los coeficientes de Lamé L_2 y L_3 de las coordenadas q_2 y q_3.

Si el punto $P(x, y, z)$ tiene las coordenadas curvilíneas $q_1 = q_1(x, y, z)$, $q_2 = q_2(x, y, z)$, $q_3 = q_3(x, y, z)$, las diferenciales de los radio vectores dr_{q_ν} de las líneas coordenadas y las diferenciales de sus arcos ds_{q_ν} se definen con ayuda de las igualdades

$$dr_{q_\nu} = i\frac{\partial x}{\partial q_\nu}dq_\nu + j\frac{\partial y}{\partial q_\nu}dq_\nu + k\frac{\partial z}{\partial q_\nu}dq_\nu \quad L_\nu e_{q_\nu}dq_\nu,$$

$$ds_{q_\nu} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\nu}\right)^2}dq_\nu = L_\nu dq_\nu,$$

($\nu = 1, 2, 3$), donde L_ν es el coeficiente de Lamé

El conjunto de puntos $P(q_1, q_2, q_3)$ para los cuales una de las coordenadas es constante, se llama *superficie coordenada*.

Las diferenciales de las áreas de las superficies coordenadas se determinan por las fórmulas

$$d\sigma_{q_1} = L_2L_3\,dq_2\,dq_3, \quad d\sigma_{q_2} = L_1L_3\,dq_1\,dq_3,$$

$$d\sigma_{q_3} = L_1L_2\,dq_1\,dq_2$$

y la diferencial de volumen

$$dv = L_1L_2L_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3$$

Determínese el tipo de líneas coordenadas y las superficies coordenadas y constrúyanse éstas en un punto arbitrario para los casos siguientes:

5.1. Para el sistema rectangular cartesiano de coordenadas.

5.2. Para el sistema cilíndrico de coordenadas.

5.3. Para el sistema esférico de coordenadas.

Calcúlense los coeficientes de Lamé:

5.4. En el sistema rectangular cartesiano de coordenadas.

5.5. En el sistema cilíndrico de coordenadas.

5.6. En el sistema esférico de coordenadas.

Hállense las diferenciales de los arcos de las líneas coordenadas, las diferenciales de las áreas de las superficies coordenadas y la diferencial de volumen:

5.7. En el sistema rectangular cartesiano de coordenadas.

5.8. En el sistema cilíndrico de coordenadas.

5.9 En el sistema esférico de coordenadas.

2. Operaciones diferenciales del análisis vectorial en las coordenadas curvilíneas. Las operaciones mencionadas se definen por las fórmulas siguientes:

$$\text{grad } u = \frac{1}{L_1}\frac{\partial u}{\partial q_1} e_{q_1} + \frac{1}{L_2}\frac{\partial u}{\partial q_2} e_{q_2} + \frac{1}{L_3}\frac{\partial u}{\partial q_3} e_{q_3},$$

$$\text{div } \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_1 L_2 L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(L_2 L_3 a_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(L_1 L_3 a_{q_2}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}(L_1 L_2 a_{q_3})\right),$$

donde $\boldsymbol{a} = a_{q_1} e_{q_1} + a_{q_2} e_{q_2} + a_{q_3} e_{q_3}$),

$$\text{rot } \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_2 L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}(L_3 a_{q_3}) - \frac{\partial}{\partial q_3}(L_2 a_{q_2})\right) e_{q_1} +$$

$$+ \frac{1}{L_1 L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_3}(L_1 a_{q_1}) - \frac{\partial}{\partial q_1}(L_3 a_{q_3})\right) e_{q_2} +$$

$$+ \frac{1}{L_1 L_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(L_2 a_{q_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2}(L_1 a_{q_1})\right) e_{q_3},$$

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{1}{L_1 L_2 L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{L_2 L_3}{L_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{L_1 L_3}{L_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{L_1 L_2}{L_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right).$$

Para las coordenadas cilíndricas r, φ, y z hállense las expresiones:

5.10. grad u. **5.11.** Δu. **5.12** div. $\boldsymbol{a}$. **5.13.** rot $\boldsymbol{a}$

Para las coordenadas esféricas r, θ, φ hállense las expresiones:

5.14. grad u. **5.15.** Δu. **5.16.** div $\boldsymbol{a}$. **5.17.** rot $\boldsymbol{a}$.

EJEMPLO 1. Pásese a las coordenadas cilíndricas en la expresión del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ y hállense div $\boldsymbol{a}$ y rot $\boldsymbol{a}$.

◀ Puesto que en el caso dado $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = \boldsymbol{r}$, entonces

$$\boldsymbol{a} = \frac{r\boldsymbol{e}_r - z\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Por las fórmulas obtenidas al resolver los problemas 5.12 y 5.13, hallamos:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (ra_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{2r(r^2+z^2)-r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}} - r\frac{(r^2+z^2)-z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{2z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (ra_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z = -\frac{2rz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_\varphi. \blacktriangleright$$

5.18. Dedúzcanse las fórmulas:

a) $\operatorname{div} \boldsymbol{e}_\nu = \dfrac{1}{L_1 L_2 L_3}\dfrac{\partial (L_j L_k)}{\partial q_\nu}$;

b) $\operatorname{rot} \boldsymbol{e}_\nu = \dfrac{1}{L_\nu}[\operatorname{grad} L_\nu, \boldsymbol{e}_\nu]$.

5.19. Empleando las fórmulas deducidas al resolver el problema 5.18, hállense div $\boldsymbol{a}$ y rot $\boldsymbol{a}$ para los vectores coordenados unitarios del sistema cilíndrico de coordenadas:

a) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r$; b) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\varphi$; c) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_z$.

5.20. Un problema, análogo al 5.19, para el sistema esférico de coordenadas:

a) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r$; b) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\theta$; c) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\varphi$.

5.21. Hállense todas las funciones armónicas del tipo:

a) $u = f(r)$; b) $u = f(\varphi)$; c) $u = f(z)$

(r, φ, z son coordenadas cilíndricas).

5.22. Hállense todas las funciones armónicas del tipo:

a) $u = f(r)$; b) $u = f(\theta)$; c) $u = f(\varphi)$

(r, θ, φ son coordenadas esféricas).

5.23. Pásese a las coordenadas esféricas en la expresión del campo escalar $u = \dfrac{2xy(z^2-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ y hállense u, grad u y $\nabla^2 u$.

5.24. Pásese a las coordenadas cilíndricas en la expresión del campo escalar $u = \dfrac{2xyz+(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y hállense u, grad u y $\nabla^2 u$.

5.25. Pásese a las coordenadas esféricas en la expresión del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \dfrac{x\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{i}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ y hállense $\boldsymbol{a}$, div $\boldsymbol{a}$ y rot $\boldsymbol{a}$.

5.26. Pásese a las coordenadas cilíndricas en la expresión del campo vectorial $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - z\sqrt{x^2 + y^2}\,\boldsymbol{k}$ y hállense $\boldsymbol{a}$, div $\boldsymbol{a}$ y rot $\boldsymbol{a}$.

3. Campos escalares centrales, axiales y simétricos al eje. El campo escalar se llama *central* si la función del campo $u = u(P)$ depende sólo de la distancia entre el punto P del campo y cierto punto constante, su centro. Si el origen de coordenadas se coloca en el centro del campo, entonces la función u toma la forma

$$u = u(r) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

Al estudiar tales campos es razonable valerse de las coordenadas esféricas. Las superficies de nivel de tal campo serán esferas con el centro en el centro del campo y por eso estos campos a menudo llevan el nombre de *esféricos*.

El campo escalar se llama *axial* si la función del campo $u(P)$ depende sólo de la distancia entre el punto del campo P y cierto eje. Si este eje se toma por el eje Oz y la distancia del punto P al eje se designa con r, entonces la función u toma la forma

$$u = u(r) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Al investigar tales campos es conveniente aplicar las coordenadas cilíndricas. Las superficies de nivel de estos campos son cilindros circulares, cuyos ejes coinciden con el eje del campo. Estos campos también se llaman *cilíndricos*.

Si la función $u(P)$ del campo escalar toma los mismos valores en los puntos correspondientes de todos los semiplanos que pasan por la misma recta (eje del campo), este campo se llama *simétrico al eje*. Las superficies de nivel de tal campo son superficies de revolución, cuyos ejes coinciden con el eje del campo. Si el eje del campo se toma por eje Oz, al investigar tales campos es conveniente aplicar las coordenadas cilíndricas o esféricas. La función $u = u(P)$ puede ser representada, en este caso, en forma de

$$u = u(r, \theta)$$

(en coordenadas esféricas), o

$$u = u(r, z)$$

(en coordenadas cilíndricas).

Hállense los gradientes y laplacianos de los campos siguientes:

5.27. $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

5.28. $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5.29. $u = F(r, \theta)$ (r, θ son coordenadas esféricas).

5.30. $u = F(r, z)$ (r, z son coordenadas cilíndricas).

OBSERVACIÓN. Los gradientes de los campos centrales, axiales y simétricos al eje forman campos vectoriales del mismo carácter: campos centrales, axiales y simétricos al eje.

RESPUESTAS

1.1. Las líneas de nivel son parábolas $y^2 = Cx$. **1.2.** Las líneas de nivel son hipérbolas $xy = C$ (para $C = 0$ es un conjunto de ejes coordenados). **1.3.** Las líneas de nivel son rectas $y = Cx$. **1.4.** Las superficies de nivel son planos paralelos $x + y + z = C$. **1.5.** Las superficies de nivel son hiperboloides de una hoja y de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = \pm C^2$ (para $C = 0$ es un cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$). **1.6.** Las superficies de nivel son paraboloides de revolución $x^2 + y^2 = z + C$. **1.7.** Las hipersuperficies de nivel son planos paralelos cuadridimensionales $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = C$. **1.8.** Las hipersuperficies de nivel son esferas cuadridimensionales $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = C^2$. **1.9.** Circunferencias $x^2 - y^2 = C^2$. **1.10.** Hiperboloides $xy = C$ (para $C = 0$ es un conjunto de ejes coordenadas). **1.11.** Parábolas $y^2 = 2(x + C)$. **1.12.** Rectas $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$. **1.13.** Circunferencias que son secciones de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ por los planos $c_x x + c_y y + c_z z = C_2$ perpendiculares al vector $\boldsymbol{c} = c_x \boldsymbol{i} + c_y \boldsymbol{j} + c_z \boldsymbol{k}$. **1.14.** Líneas de intersección de los cilindros hiperbólicos $y^2 - x^2 = C_1$ con cilindros idénticos $z^2 - x^2 = C_2$. **1.15.** Circunferencias que son líneas de intersección de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ con los planos $x + y + z = C_2$. **1.16.** Rectas del espacio cuadridimensional perpendiculares al eje Ox_3 y rectas que lo intersecan: $\frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2} = \frac{x_4}{l_4}$; $x_3 = C$.

1.17. a) Superficies cónicas con vértices en el origen de coordenadas de cuyas directrices sirven las curvas cerradas dadas; b) superficies toroidales generadas por las circunferencias con centros en la recta $x = y = z$ situados en los planos $x + y + z = C$ de cuyas secciones sirven las curvas cerradas dadas. **1.21.** 135.

1.22. $4/\sqrt{5}$. **1.23.** 14/3. **1.24.** $\cos\psi = -4/\sqrt{41}$. **1.25.** $\frac{\partial u}{\partial n} = 2\sqrt{6}$, $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$. **1.26.** $\frac{1}{\sqrt{17}}(2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})$. **1.27.** $P(3, 3, -3)$.

1.30. a) $xy = C$; b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ x^2 - z^2 = C_2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = C_1 x, \\ z = C_2 x. \end{cases}$

2.1. $\frac{9}{64} k\pi a^3$. **2.2.** $2k\pi a \sqrt{2a}$. **2.3.** $k\pi a^2$. **2.4.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **2.5.** $\frac{ka\sqrt{3}}{2}$.

2.6. $F = -\frac{Mmc}{(a^2 + c^2)^{3/2}}$. **2.7.** αr^2. **2.8.** $\frac{4}{3}\beta r^4$. **2.9.** $\frac{8ka^3}{15}(\sqrt{2} + 1)$.

2.10. $\frac{\pi a^4 \sqrt{2}}{2}$. **2.11.** $\frac{k\pi a^3}{3}(3\sqrt{3} - 1)$. **2.12.** $\frac{27}{2} ka^3$. **2.13.** $\frac{\pi k}{4} a^2 \sqrt{a} \times$ $\times (3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))$. **2.14.** πab. **2.15.** a) 2,3; b) 0,7; c) 0,7; d) 1.

e) 1. **2.16.** $2\pi R^3$. **2.17.** 91,60. **2.18.** $2\pi^2 a^2 h$. **2.19.** $\frac{2\pi R^3}{3}$. ◀ $z = R - x - y$, $x^2 + y^2 + (R - x - y)^2 = R^2$ ó $x^2 + xy + y^2 = R(x + y)$. Ponemos $y = tx$. Entonces tenemos: $x = \frac{R(1+t)}{1+t+t^2}$ $y = \frac{R(t+t^2)}{1+t+t^2} = R - \frac{R}{1+t+t^2}$, $z = -\frac{Rt}{1+t+t^2}$. Al valor $t = 0$ corresponde el punto $A(R, 0, 0)$, a los valores $t = \pm\infty$, el punto $B(0, R, 0)$; al valor $t = -1$, el punto $C(0, 0, R)$. Al recorrido en el sentido positivo respecto al eje Oz corresponde el recorrido $BCAB$, es decir, la variación de t desde $-\infty$ a través -1 y 0 hasta $+\infty$.

Luego, $dx = -\frac{R(t^2+2t)}{(1+t+t^2)^2}\,dt$, $dy = \frac{R(2t+1)}{(1+t+t^2)^2}\,dt$, $dz = \frac{R(t^2-1)}{(1+t+t^2)^2}\,dt$.

Obtenemos $z\,dx + x\,dy + y\,dz = \frac{R^2(1+2t+3t^2+2t^3+t^4)}{(1+t+t^2)^3}\,dt = \frac{R^2\,dt}{1+t+t^2}$,

de donde $\oint\limits_C (a, dr) = R^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^2} = R^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2} =$

$= \frac{2R^2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$. ▶ **2.20.** $2\pi a^2$. **2.21.** $\left(2\sqrt{2} - \frac{7}{3}\right) a^3$. **2.22.** $2r^2$. **2.23.** -4π. **2.24.** $\frac{\pi r^4}{2}$. **2.25.** $-1/3$. **2.26.** $\frac{\pi R^2 H}{3}$. **2.27.** $\frac{\pi R^2 H}{4}$. **2.28.** $\frac{\pi R^2 H^2}{3}$. **2.29.** $\frac{\pi R^4}{8}$. **2.30.** 0. **2.31.** πR^4. **2.32.** $-\frac{R^2 H}{3}$. **2.33.** 0.

3.2. a^5. **3.3.** $4\pi R^2$. **3.4.** $-\pi R^3$. ● Ciérrese la superficie, añadiendo la base del segmento parabólico y calcúlese la parte del flujo que le corresponde. **3.5.** Si $a = a_x i + a_y j$ entonces, el flujo del vector a a través del arco $\overset{\frown}{AB}$ se determina por la fórmula $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (a, n)\,ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} a_x\,dx - a_y\,dy$. El teorema de Gauss—Ostrogradski para el campo plano es: $\oint\limits_l (a, n)\,ds = \oint\limits_l a_x\,dy - a_y\,dx =$

$= \iint\limits_Q \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right) dx\,dy$. **3.6.** $\oint\limits_l a_x\,dx + a_y\,dy = \iint\limits_Q \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\,dy$ (fórmula de Green). ● Póngase en la fórmula anterior (problema 3.5) $a_x = a_y$, $a_y = -a_x$. **3.7.** $\frac{R^3}{3}$. **3.8.** $\frac{\pi R^4 H}{2}$. **3.9.** rot $v = 2\omega$. ● La velocidad v del punto $P(r)$ que gira con una velocidad angular ω alrededor del eje que pasa por el origen de coordenadas, es igual a $[\omega, r]$. **3.12.** a) a^2. ● Páseo a la forma

paramétrica poniendo $y = tx$; al bucle corresponde la variación de t desde 0 hasta $+\infty$. b) $\frac{3}{8}\pi\frac{a^2b^2}{c^2}$. **3.13.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **3.14.** $\frac{3}{2}\pi R^3$. **3.15.** $\frac{R^3}{3}$. **3.16.** $\operatorname{div}(cu) = (c, \operatorname{grad} u)$ $\operatorname{div}(a, u) = u \operatorname{div} a + (a, \operatorname{grad} u)$. **3.17.** $\operatorname{grad}(a, c) = [c, \operatorname{rot} a] + (c, \nabla) a$, $\operatorname{grad}(a, b) = [b, \operatorname{rot} a] + [a, \operatorname{rot} b] + (b, \nabla) a + (a, \nabla) b$. ▶ Previamente hállese $[c, \operatorname{rot} a]$. Tenemos $[c, \operatorname{rot} a] = [c, [\nabla, a]] = (a, c)\nabla - (c, \nabla) a = \nabla(a, c) - (c, \nabla) a$. De aquí, $\nabla(a, c) = [c, \operatorname{rot} a] + (c, \nabla) a$; luego, $\operatorname{grad}(a, b) = \nabla(a, b) + \nabla(b, a)$ y empleemos el resultado anterior. ▶ **3.18.** $\operatorname{div}[a, c] = (c, \operatorname{rot} a)$, $\operatorname{div}[a, b] = (b, \operatorname{rot} a) - (a, \operatorname{rot} b)$. **3.19.** $\operatorname{rot}(cu) = [\operatorname{grad} u, c]$, $\operatorname{rot}(au) = u \operatorname{rot} a + [\operatorname{grad} u, a]$, $\operatorname{rot}[a, b] = (b, \nabla) a - (a, \nabla) b + a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a$. ● Véase la solución del ejemplo 5. **3.20.** $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\operatorname{grad} \operatorname{div} a = \nabla(\nabla, a) = \frac{\partial(\operatorname{div} a)}{\partial x} i + \frac{\partial(\operatorname{div} a)}{\partial y} j + \frac{\partial(\operatorname{div} a)}{\partial z} k$, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} a = [\nabla [\nabla, a]] = \nabla(\nabla, a) - \nabla^2 a = \operatorname{grad} \operatorname{div} a - \nabla^2 a$, $\nabla^2 a = \nabla^2 a_x i + \nabla^2 a_y j + \nabla^2 a_z k$. **3.21.** $6r = 6(xi + yj + zk)$. **3.22.** 0. **3.23.** $4r = 4(xi + yj + zk)$. **3.24.** $u \operatorname{div} \operatorname{grad} v + 2(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + v \operatorname{div} \operatorname{grad} u$. **3.25.** $\operatorname{grad} \operatorname{div}(uc) = (c, \nabla) \operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad} \operatorname{div}(ua) = u \operatorname{grad} \operatorname{div} a + \operatorname{div} a \operatorname{grad} u + [\operatorname{grad} u, \operatorname{rot} a] + (\operatorname{grad} u, \nabla) a + (a, \nabla) \operatorname{grad} u$. **3.26.** $\operatorname{rot} \operatorname{rot}(uc) = (c, \nabla) \operatorname{grad} u - c\nabla^2 u$.

4.1. $x^3y - xy^3 + C$. **4.2.** $2 \int \sqrt{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 x \cos^2 y} + C$. **4.3.** $xyz - \frac{x^2y}{2} + \frac{y^2z^2}{2} + C$. **4.4.** $\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + C$. ● Tómese por punto inicial A el punto (1, 1, 1) ó cualquier otro punto no situado en los ejes de coordenadas. **4.5.** $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} - \frac{xy}{z^2} + C$. ● Véase la indicación al problema anterior.

4.6. ◀ Si en todo punto del campo potencial continuo pudiesen existir líneas vectoriales cerradas, entonces la circulación a lo largo de tal línea no podría ser igual a cero, ya que el producto (a, dr) a lo largo de toda la línea conservaría un signo constante y por eso $\oint (a, dr) \neq 0$. ▶ **4.7.** El punto singular es O (0, 0), la constante cíclica es igual a 2π. **4.8.** ● Tómense dos contornos arbitrarios cerrados que cercan el punto singular dado: AMA y BNB. Unanse los puntos M y N mediante el segmento de una recta y aplíquese al contorno compuesto $AMNBNMA$ la fórmula de Green. **4.9.** ● Al determinar el potencial utilícense los contornos que recorren los puntos singulares varias veces y en distintas direcciones. **4.15.** ● Aplíquese el teorema de Gauss—Ostrogradski y téngase en consideración que en la superficie lateral del tubo $(a, n) = 0$. **4.17.** ● Aplíquese el teorema de Gauss—Ostrogradski y considérese que para las funciones armónicas $\nabla^2 u = 0$. **4.18.** a) No; b) no; c) sí; d) sólo para $A + C = 0$; e) sólo si $A + C = B + D = 0$; f) sí; g) sólo cuando $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$; h) sólo

si $a_{111} + a_{122} + a_{133} = a_{112} + a_{222} + a_{233} =$
$= a_{113} + a_{223} + a_{333} = 0$. 5.1. Líneas x: $\frac{x}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{0}$;
líneas y: $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z - z_0}{0}$; líneas z: $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z}{1}$.

5.2. líneas r: $\varphi = \varphi_0$, $z = z_0$
(los rayos que parten de los puntos del eje Oz y que se encuentran en los planos horizontales); líneas φ: $r = r_0$, $z = z_0$ (las circunferencias con centros en el eje Oz y radio r_0 las cuales se encuentran en los planos $z = z_0$); líneas z: $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ (las rectas paralelas al eje Oz). 5.3. Líneas r: $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ (los rayos que parten del origen de coordenadas), líneas θ: $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ (las semicircunferencias de radio r_0 y con centro en el origen de coordenadas, las cuales se encuentran en los semiplanos $\varphi = \varphi_0$ que pasan por el eje Oz, es decir, meridianos). Líneas φ: $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ (las circunferencias de radio r_0 sen θ_0 y con centro en el eje Oz, las cuales se encuentran en los planos horizontales, es decir, las paralelas). 5.4. $L_x = L_y = L_z = 1$. 5.5. $L_r = L_z = 1$, $L_\varphi = r$. 5.6. $L_r = 1$, $L_\theta = r$, $L_\varphi = r \operatorname{sen} \theta$. 5.7. $ds_x = dx$, $ds_y = dy$, $ds_z = dz$; $d\sigma_x = dy\,dz$, $d\sigma_y = dx\,dz$, $d\sigma_z = dx\,dy$; $dv = dx\,dy\,dz$. 5.8. $ds_r = dr$, $ds_\varphi = r\,d\varphi$, $ds_z = dz$; $d\sigma_r = r\,d\varphi\,dz$, $d\sigma_\varphi = dr\,dz$, $d\sigma_z = r\,dr\,d\varphi$; $dv = r\,dr\,d\varphi\,dz$. 5.9. $ds_r = dr$, $ds_\theta = r\,d\theta$, $ds_\varphi = r \operatorname{sen} \theta\,d\varphi$; $d\sigma_r = r^2 \operatorname{sen} \theta\,d\theta\,d\varphi$, $d\sigma_\theta = r \operatorname{sen} \theta\,dr\,d\varphi$, $d\sigma_\varphi = r\,dr\,d\theta$; $dv = r^2 \operatorname{sen} \theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$.

5.10. $\frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z$. 5.11. $\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$. 5.12. $\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z} \right)$. 5.13. $\left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) e_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) e_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) e_z$. 5.14. $\frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi$. 5.15. $\frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right)$. 5.16. $\frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \operatorname{sen} \theta) + r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right)$. 5.17. $\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (a_\varphi \operatorname{sen} \theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) e_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right) e_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) e_\varphi$.

5.19. a) $\operatorname{div} e_r = \frac{1}{r}$, $\operatorname{rot} e_r = 0$; b) $\operatorname{div} e_\varphi = 0$, $\operatorname{rot} e_\varphi = \frac{e_z}{r}$; c) $\operatorname{div} e_z = 0$, $\operatorname{rot} e_z = 0$. 5.20. a) $\operatorname{div} e_r = \frac{2}{r}$, $\operatorname{rot} e_r = 0$; b) $\operatorname{div} e_\theta = -\frac{\operatorname{ctg} \theta}{r}$, $\operatorname{rot} e_\theta = \frac{e_\varphi}{r}$; c) $\operatorname{div} e_\varphi = 0$, $\operatorname{rot} e_\varphi = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} e_r - \frac{1}{r} e_\theta$.

5.21. a) $u = C_1 \ln r + C_2$; b) $u = C_1\varphi + C_2$; c) $u = C_1 z + C_2$. **5.22.** a) $u = \frac{C_1}{r} + C_2$; b) $u = C_1 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + C_2$; c) $u = C_1\varphi + C_2$. **5.23.** $u = r^2 \operatorname{sen} 2\varphi \cos 2\theta$, $\operatorname{grad} u = 2r \left(\operatorname{sen} 2\varphi \cos 2\theta e_r - \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} 2\theta e_\theta + \frac{\cos 2\varphi \cos 2\theta}{\operatorname{sen} \theta} e_\varphi \right)$, $\nabla^2 u = 2 \operatorname{sen} 2\varphi (1 - 2 \operatorname{ctg}^2 \theta)$. **5.24.** $u = rz \operatorname{sen} 2\varphi + \frac{1}{2} r \cos 2\varphi$, $\operatorname{grad} u = (z \operatorname{sen} 2\varphi + \cos 2\varphi) e_r + 2 (z \cos 2\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi) e_\varphi + r \operatorname{sen} 2\varphi e_z$, $\nabla^2 u = -\frac{3u}{r^2}$. **5.25.** $a = \operatorname{sen} \theta e_\varphi$, $\operatorname{div} a = 0$, $\operatorname{rot} a = \frac{1}{r} (2 \cos \theta e_r - \operatorname{sen} \theta e_\theta)$. **5.26.** $a = rz (e_r - e_z)$, $\operatorname{div} a = 2z - r$, $\operatorname{rot} a = (r + z) e_\varphi$. **5.27.** $\operatorname{grad} u = f'(r) e_r = f'(r) \frac{r}{r}$, $\nabla^2 u = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r}$. **5.28.** $\operatorname{grad} u = f'(r) e_r = f'(r) \frac{r}{r}$, $\nabla^2 u = f''(r) + \frac{f'(r)}{r}$. **5.29.** $\operatorname{grad} u = \frac{\partial F}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} e_\theta$, $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta}$. **5.30.** $\operatorname{grad} u = \frac{\partial F}{\partial r} e_r + \frac{\partial F}{\partial z} e_z$, $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$.

CAPÍTULO 11

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

§ 1. Funciones elementales

1. Concepto de función de variable compleja. El conjunto de puntos E del plano complejo extendido se llama *conexo*, si cualesquiera dos puntos suyos pueden unirse por una curva continua, todos los puntos de la cual pertenecen al conjunto dado. El conjunto abierto conexo de los puntos del plano complejo se llama *región* y se designa mediante D, G, etc. La región D se llama *simplemente conexa*, si su frontera es un conjunto conexo; en el caso contrario la región D lleva el nombre de *región múltiplemente conexa*. Por ejemplo, el círculo $|z - z_0| < R$ es una región simplemente conexa y el anillo $0 \leqslant r < |z - z_0| < R$, una región múltiplemente (doblemente) conexa.

Si a todo número complejo $z = x + iy$ perteneciente a la región D, según cierta regla, está puesto en correspondencia uno o varios números complejos $w = u + iv$, entonces se dice que en el conjunto D está definida la función y se escribe simbólicamente:

$$w = f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Uno de los procedimientos más empleados para definir la función, la definición con ayuda de fórmulas, puede llevar tanto a las funciones uniformes como a las multiformes. Así pues, la función $w = z^2$ es uniforme en el plano complejo extendido, ya que a todo z le corresponde un valor de $w = z^2$ y la función $w = \sqrt{z}$, en virtud de la definición de la raíz del número complejo, es biforme en todos los puntos, excepto los puntos $z = 0$ y $z = \infty$ en los cuales es uniforme; tales puntos suelen llamarse *puntos de ramificación*. La función $w = \operatorname{Arg} z$ es también multiforme y está definida en todo punto, excepto $z = 0$ y $z = \infty$.

La función uniforme $f(z)$ definida geométricamente en D puede considerarse como aplicación de la región D del plano (z) sobre cierto conjunto G del plano (w), que es colección de los valores de $f(z)$ correspondientes a todo $z \in D$.

EJEMPLO 1. Investíguese la aplicación que realiza la función lineal $w = az + b$.

◀ Se puede considerar esta aplicación como composición de tres aplicaciones elementales. Efectivamente, pongamos

$$w_1 = |a|z,$$
$$w_2 = e^{i\arg a} w_1,$$
$$w_3 = w_2 + b.$$

No es difícil ver que $w = w_3 \circ w_2 \circ w_1$. Del sentido geométrico del producto y de la suma de los números complejos está claro que la aplicación w_1 es la aplicación de alargamiento (restricción para $0 < |a| < 1$), la aplicación w_2 representa el giro de todo el plano (w_1) respecto al origen, en un ángulo $\varphi = \arg a$ y, por fin, la aplicación w_3 es una traslación paralela del plano w_2 sobre el vector que representa el número complejo b. ▶

La función $w = f(z)$ se llama *unifoliada* en la región D, si a los distintos cualesquiera valores arbitrarios $z_1 \neq z_2$ tomados de la región D, les corresponden distintos valores de la función $f(z_1) \neq f(z_2)$.

EJEMPLO 2. Hállese la región de la función unifoliada $w = z^2$.

◀ Sean $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. Determínese la condición con la cual $z_1^2 = z_2^2$, aunque $z_1 \neq z_2$. Tenemos $\rho_1^2 e^{i2\varphi_1} = \rho_2^2 e^{i2\varphi_2}$. De aquí sacamos la conclusión de que $\rho_1 = \rho_2$ y $2\varphi_2 = 2\varphi_1 + 2k\pi$ $(k = 0, 1)$. Ya que $z_1 \neq z_2$, entonces $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$. De este modo la región de la función unifoliada $w = z^2$ no debe contener dentro puntos, cuyos módulos coinciden y los argumentos difieren en π; es decir, la región de función unifoliada es cualquier semiplano, por ejemplo $\operatorname{Re} z > 0$ o $\operatorname{Im} z > 0$. ▶

Descríbanse las regiones definidas por las siguientes relaciones y determínese si son uniformes:

1.1. $|z - z_0| < R$. **1.2.** $1 < |z - i| < 2$.

1.3. $2 < |z - i| < \infty$. **1.4.** $0 < \operatorname{Re}(2iz) < 1$.

1.5. $|z - z_0| > R$. **1.6.** $0 < |z + i| < 2$.

1.7. $\operatorname{Im}(iz) < 1$. **1.8.** $\operatorname{Re}\frac{1}{z} > \frac{1}{4}$.

Determínense en el plano complejo los conjuntos de puntos que satisfacen las relaciones indicadas:

1.9. $\operatorname{Im}\frac{z+1}{z-1} = 0$. **1.10.** $|z - i| + |z + i| < 4$.

1.11. $\operatorname{Re}\frac{z-2i}{z+2i} = 0$. **1.12.** $|z - 5| - |z + 5| \leq 6$.

1.13. $\arg\frac{z-z_1}{z-z_2} = 0$. **1.14*.** $\arg\frac{i-z}{z+i} = 0$.

Aplicando las desigualdades anótense los conjuntos abiertos siguientes del plano complejo:

1.15. Del primer cuadrante.

1.16. Del semiplano izquierdo.

1.17. De la franja compuesta de los puntos que se encuentran del eje imaginario a una distancia menor que tres.

1.18. Del interior de la elipse con focos en los puntos $1 + i$, $3 + i$ y el semieje mayor igual a tres.

1.19. Del interior del ángulo con vértice en el punto z_0 de la abertura $\pi/4$, que es simétrico respecto al rayo paralelo al semieje imaginario positivo.

Hállese $\operatorname{Arg} f(z)$ si $z = re^{i\Phi}$:

1.20. $f(z) = z^2$. **1.21.** $f(z) = z^n$.

1.22. $f(z) = \sqrt[3]{z+1}$. **1.23.** $f(z) = \sqrt{z-8}$.

1.24. $f(z) = \sqrt{z^2-4}$. **1.25.** $f(z) = \sqrt{\dfrac{z-2}{z+1}}$.

Hállense las regiones de función unifoliada de las funciones siguientes:

1.26. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. **1.27.** $f(z) = e^z$.

1.28. $f(z) = e^{\pi i z}$. **1.29*.** $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

1.30. Para las aplicaciones dadas por las funciones:

a) $w = z^2$, b)** $w = \dfrac{1}{z}$

hállense las imágenes de las líneas $x = C$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ y la imagen de la región $|z| < r$, $\operatorname{Im} z > 0$.

2. Límite y continuidad de una función de variable compleja. Funciones elementales. El número $A \neq \infty$ se llama *límite* de la función $f(z)$ para $z \to z_0$ y se denota por $A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal, que para todo $z \neq z_0$ que satisface la desigualdad $|z - z_0| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Decimos que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, si para cualquier $R > 0$ existe $\delta = \delta(R) > 0$ tal, que para todo $z \neq z_0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(z)| > R.$$

Hay que tener en cuenta que para la función dada $f(z)$, la existencia del límite por cualquier camino fijo ($z \to z_0$) no garantiza todavía la existencia del límite $f(z)$ para $z \to z_0$.

EJEMPLO 3. Sea $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right)$. Muéstrese que el $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ no existe.

◀ Para el límite cuando $r \to 0$ por cualquier rayo $re^{i\varphi}$ tenemos

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2i}\left(\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}} - \frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}}\right) = \operatorname{sen} 2\varphi,$$

es decir, estos límites son distintos para distintas direcciones, ellos completan el segmento $[-1, 1]$ y, por consiguiente,

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right)$$

no existe. ▶

La función $f(z)$ se llama *continua en el punto* z_0 si está definida en este punto y $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

La función continua en todo punto de la región D se llama *continua* en esta región.

La función $f(z)$ se llama *uniformemente continua* en la región D, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal, que para cualesquiera puntos z_1 y z_2 de la región D, tales que $|z_1 - z_2| < \delta$, se cumple la desigualdad $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Citemos algunas funciones elementales de variable compleja:

a) Función lineal

$$w = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0.$$

b) Función potencial

$$w = z^n, \quad n = \in [\mathbb{N}.$$

c) Raíz de índice entero n

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

d) Función lineal fraccional

$$w = \frac{az+b}{cz+d},$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0.$$

e) Función racional general

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}, \quad n, m \in [\mathbb{N}.$$

f) Función de Zhukovski

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

g) Función exponencial

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

h) Funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}.$$

i) Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

j) Función logarítmica

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi).$$

La expresión $\ln |z| + i \arg z$ se llama *valor principal* de la función logarítmica y se designa por $\ln z$. De este modo,

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i.$$

k) Funciones trigonométricas inversas Arcsen z, Arccos z, Arctg z y funciones hiperbólicas inversas Arsh z, Arch z, Arth z (véanse el ejemplo 6 y los problemas 1.42—1.46).

Las aplicaciones realizadas por algunas funciones elementales y las propiedades de estas funciones serán estudiadas más adelante (en el § 3); aquí nos limitamos sólo a calcular los valores concretos de estas funciones.

EJEMPLO 4. Calcúlese sen i.

◀ Tenemos:

$$\operatorname{sen} i = \frac{e^{ii} - e^{-ii}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = i\,\frac{e^{1} - e^{-1}}{2} = i \operatorname{sh} 1. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 5. Calcúlese ch $(2 - 3i)$.

◀ Tenemos

$$\operatorname{ch}(2 - 3i) = \frac{e^{2-3i} + e^{-2+3i}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2}(\cos 3 - i \operatorname{sen} 3) + e^{-2}(\cos 3 + i \operatorname{sen} 3)\right) =$$

$$= \cos 3 \operatorname{ch} 2 - i \operatorname{sen} 3 \operatorname{sh} 2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Hállese la expresión analítica para la función Arccos z cualquiera que sea el complejo z. Calcúlese Arccos 2.

◀ Ya que la igualdad $w = \operatorname{Arccos} z$ es equivalente a la igualdad $\cos w = z$, podemos escribir que $z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$. De aquí hallamos

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática respecto a e^{iw} obtenemos

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

(aquí se consideran ambos valores de la raíz). A partir de esta igualdad hallamos

$$iw = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

es decir,

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

De aquí obtenemos

$$\operatorname{Arccos} 2 = -i \operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi. \blacktriangleright$$

1.31. Valiéndose de los símbolos lógicos escríbase la definición mencionada más arriba de la continuidad de la función en la región.

1.32. Utilizando la definición dada anteriormente de la función e^z, demuéstrese que e^z tiene un período puramente imaginario $2\pi i$, es decir, $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Demuéstrense las identidades:

1.33. $\operatorname{sen} iz = i \operatorname{sh} z$. **1.34.** $\cos iz = \operatorname{ch} z$.

1.35. $\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z$.

Calcúlense los valores de las funciones en los puntos indicados:

1.36. $\cos(1 + i)$. **1.37.** $\operatorname{ch} i$.

1.38. $\operatorname{sh}(-2 + i)$. **1.39.** $\operatorname{Ln}(-1)$.

1.40. $\ln i$. **1.41.** $\operatorname{Ln} \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Obténganse las expresiones analíticas para las funciones dadas más abajo y para cada una de ellas hállese el valor en el punto correspondiente z_0 (véase el ejemplo 6):

1.42. $w = \operatorname{Arcsen} z$, $z_0 = i$.

1.43. $w = \operatorname{Arctg} z$, $z_0 = i/3$.

1.44. $w = \operatorname{Arsh} z$, $z_0 = i$.

1.45. $w = \operatorname{Arch} z$, $z_0 = -1$.

1.46. $w = \operatorname{Arth} z$, $z_0 = 1 - i$.

Anteriormente la función potencial fue definida para $n \in \mathbb{N}$. Con ayuda de la función logarítmica se puede introducir también la función potencial general. Precisamente, si u y v son dos números complejos, $u \neq 0$, entonces ponemos

$$u^v = e^{v \operatorname{Ln} u},$$

con la particularidad de que para precisar consideraremos, que $\operatorname{Ln} u = \ln u$ para $u > 0$ reales.

Hállense todos los valores de las potencias:

1.47. 2^i. **1.48.** $(-1)^i$. **1.49.** $(1+i)^i$.

1.50. $(-1)^{\frac{1}{\pi}}$. **1.51.** $(3-4i)^{1+i}$. **1.52.** $(-3+4i)^{1+i}$.

¿Qué determinación complementaria de las funciones dadas en el punto $z=0$ hay que hacer, para que sean continuas en este punto?

1.53. $f(z)=\frac{z\,\mathrm{Re}\,z}{|z|}$. **1.54.** $f(z)=\frac{z\,\mathrm{Im}\,(z^2)}{|z|^2}$.

1.55. $f(z)=e^{-1/|z|}$. **1.56.** $f(z)=z/|z|$.

1.57. Demuéstrese que la función $f(z)=e^{-1/z}$ es continua en el semicírculo $0<|z|\leqslant 1$, $|\arg z|\leqslant \pi/2$, pero no es uniformemente continua en este semicírculo y, en todo sector $0<|z|\leqslant 1$, $|\arg z|\leqslant \alpha<\pi/2$, es uniformemente continua.

§ 2. Funciones analíticas. Condición de Cauchy — Riemann

1. Derivada. Analiticidad de la función. Si en el punto $z\in D$ existe el límite

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},\quad z+\Delta z\in D,$$

entonces éste se llama *derivada* de la función $f(z)$ en el punto z y se designa mediante $f'(z)$ o $\frac{df(z)}{dz}$.

Si en el punto $z\in D$ la función $f(z)$ tiene la derivada $f'(z)$, se dice que la función $f(z)$ es *diferenciable* en el punto z.

La función $f(z)$ diferenciable en todo punto de la región D y que tiene en esta región la derivada continua $f'(z)$ se llama *analítica en la región* D. Diremos también que $f(z)$ es *analítica en el punto* $z_0\in D$, si $f(z)$ es analítica en cierto entorno del punto z_0.

La condición de continuidad de la derivada $f'(z)$ que figura en la definición de la analiticidad de la función $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, puede ser sustituida por una condición más débil de diferenciabilidad en cada punto $(x, y)\in D$ de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

Para que la función $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ sea analítica en la región D es necesario y suficiente que existan en esta región las derivadas parciales continuas de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$, que satisfacen las condiciones de Cauchy—Riemann

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x, y)}{\partial y},\qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, \tag{1}$$

o, en coordenadas polares,

$$\frac{\partial u(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)}{\partial\varphi},$$
$$\frac{\partial v(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)}{\partial\varphi}. \qquad (2)$$

Si se cumple la condición (1) o (2) la derivada $f'(z)$ puede ser anotada respectivamente:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3)$$

o bien

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}-i\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right). \qquad (4)$$

Las fórmulas de diferenciación de las funciones de variable compleja, son análogas a las fórmulas correspondientes de diferenciación de las funciones de variable real.

EJEMPLO 1. Demuéstrese que la función $f(z)=e^{2z}$ es analítica y hállese $f'(z)$.

◀ Tenemos

$$e^{2z}=e^{2x}(\cos 2y+i\operatorname{sen}2y),$$

es decir,

$$u(x,\ y)=e^{2x}\cos 2y,\quad v(x,\ y)=e^{2x}\operatorname{sen}2y.$$

Por eso

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{2x}\operatorname{sen}2y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\operatorname{sen}2y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2e^{2x}\cos 2y,$$

Por consiguiente, las condiciones (1) se cumplen en todo el plano y según la primera de las fórmulas (3)
$(e^{2z})'=2e^{2x}\cos 2y+i2e^{2x}\operatorname{sen}2y=2e^{2x}(\cos 2y+i\operatorname{sen}2y)=2e^{2z}$. ▶

EJEMPLO 2. Muéstrese que la función $w=z^3$ es analítica en todo el plano complejo (excepto $z=\infty$).

◀ En efecto, tenemos $z=re^{i\varphi}$ y

$$w=z^3=r^3e^{i3\varphi}=r^3\cos 3\varphi+ir^3\operatorname{sen}3\varphi,$$

además

$$\frac{\partial u}{\partial r}=3r^2\cos 3\varphi,\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=3r^2\operatorname{sen}3\varphi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-3r^3\operatorname{sen}3\varphi,\qquad \frac{\partial v}{\partial\varphi}=3r^3\cos 3\varphi.$$

es decir, para cualquier $z = re^{i\varphi}$ finito se cumplen las condiciones (2). Aplicando la primera de las fórmulas (4) tenemos

$$f'(z) = (z^3)' = \frac{r}{3}(3r^2 \cos 3\varphi + i3r^2 \operatorname{sen} 3\varphi) = 3z^2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Muéstrese que la función logarítmica $w = \operatorname{Ln} z$ es analítica en todos los puntos finitos excepto $z = 0$, además

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}.$$

◀ Puesto que

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$$

tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} = 0,$$

es decir, están cumplidas las condiciones (2), y a partir de la primera de las fórmulas (4) hallamos

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{r}{z} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{z}. \blacktriangleright$$

Las funciones analíticas se emplean en la descripción de distintos procesos.

EJEMPLO 4. Analicemos el flujo plano, no vertiginoso, de un líquido incompresible ideal. Sean $v_x(x, y)$ y $v_y(x, y)$ los componentes del vector de velocidad v del flujo a lo largo de los ejes x e y, y sea

$$v(z) = v_x(x, y) - iv_y(x, y)$$

la velocidad compleja del flujo. Muéstrese que $v(z)$ es una función analítica.

◀ De la incompresibilidad del líquido se deduce que la divergencia del vector de la velocidad es idénticamente igual a cero, es decir,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Luego, el flujo no es vertiginoso cuando y sólo cuando el rotor de su vector de la velocidad es igual a cero, es decir,

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Pero las igualdades (6) y (7) son las condiciones de Cauchy–Riemann para la función (5), es decir, la velocidad compleja $v(z)$ es una función analítica de variable compleja $z = x + iy$.

Aclárese en qué puntos son diferenciables las funciones:

2.1. $w = \bar{z}$. **2.2*.** $w = \operatorname{Re} z$. **2.3.** $w = z \operatorname{Im} z$.

2.4. $w = z \operatorname{Re} z$. **2.5**.** $w = |z|$. **2.6.** $w = |z-1|^2$.

2.7. Suponiendo que estén cumplidas las condiciones de

Cauchy — Riemann (1) en las coordenadas rectangulares cartesianas, demuéstrese la validez de las condiciones de Cauchy — Riemann (2) en las coordenadas polares y la justeza de las fórmulas (4) para calcular la derivada en las coordenadas polares.

Verifíquese si se cumplen las condiciones de Cauchy — Riemann (1) o (2) y si se cumplen hállese $f'(z)$:

2.8. $f(z) = e^{3z}$. **2.9.** $f(z) = \operatorname{sh} z$.

2.10. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. **2.11.** $f(z) = \cos z$.

2.12. $f(z) = \ln(z^2)$. **2.13.** $f(z) = \operatorname{sen} \frac{z}{3}$.

2.14*. Sea $f(z)$ la función analítica en la región D. Demuéstrese que si una de las funciones

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z),$$
$$f(x, y) = |f(z)|, \quad \theta(x, y) = \arg f(z)$$

conserva un valor constante en esta región, entonces también $f(z) \equiv \text{const}$ en D.

2. Propiedades de las funciones analíticas. Una serie de propiedades, características para las funciones diferenciables de variable real, siguen siendo válidas para las funciones analíticas.

2.15. Demuéstrese que si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones analíticas en la región D, entonces las funciones $f(z) \pm g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$ son también analíticas en la región D y el cociente $f(z)/g(z)$ es una función analítica en todos los puntos de la región D, en los cuales $g(z) \neq 0$. En este caso tienen lugar las fórmulas

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z),$$
$$(f(z)\, g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z),$$
$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)\, g(z) - f(z)\, g'(z)}{g^2(z)}.$$

2.16. Sea $f(z)$ una función analítica en la región D con el campo de valores $G = \{f(z) \mid z \in D\}$, y sea analítica la función $\varphi(w)$ en la región G. Demuéstrese que $F(z) = \varphi(f(z))$ es una función analítica en la región D.

Empleando las afirmaciones del problema 2.15 hállense las regiones de analiticidad de las funciones y sus derivadas:

2.17. $f(z) = \operatorname{tg} z$. **2.18.** $f(z) = z \cdot e^{-z}$.

2.19. $f(z) = \dfrac{z \cdot \cos z}{1+z^2}$. **2.20.** $f(z) = \dfrac{e^z+1}{e^z-1}$.

2.21. $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}$. **2.22.** $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$.

2.23. $f(z) = \operatorname{cth} z$. **2.24.** $f(z) = \dfrac{\cos z}{\cos z - \operatorname{sen} z}$.

2.25. Demuéstrese que las partes real e imaginaria de la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica en la región D son funciones armónicas en esta región, es decir, sus laplacianos son iguales a cero:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

2.26. Obténgase la expresión del laplaciano Δu en las coordenadas polares ($u = u(r, \varphi)$).

Señalemos que dada la parte real o imaginaria la función analítica en la región D se determina con una exactitud de hasta la constante arbitraria (compleja). Por ejemplo, si $u(x, y)$ es la parte real de la función $f(z)$ analítica en la región D, entonces

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u'_y\,dx + u'_x\,dy$$

donde (x_0, y_0) es un punto fijo en la región D y el camino de integración también se encuentra en la región D.

EJEMPLO 5. Compruébese que la función $u = x^2 - y^2 - 5x + y + 2$ es la parte real de cierta función analítica $f(z)$ y hállese $f(z)$.

◀ Ya que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$$

en todo el plano, entonces $u(x, y)$ es una función armónica y en este caso

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (2y-1)\,dx + (2x-5)\,dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} (2y_0 - 1)\,dx + \int_{y_0}^{y} (2x-5)\,dy = (2y_0 - 1)(x - x_0) +$$

$$+ (2x - 5)(y - y_0) = 2xy - x - 5y + 5y_0 + x_0 - 2x_0y_0,$$

es decir,

$$v(x, y) = 2xy - x - 5y + C$$

y

$$f(z) = x^2 - y^2 - 5x + y + 2 + i(2xy - x - 5y + C) =$$
$$= (x^2 - 2ixy - y^2) - 5(x + iy) + (-xi + y) - 2 + Ci =$$
$$= z^2 - 5z - iz + 2 + Ci. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Muéstrese que la función del tipo

$$u(x, y) = a(x^2 + y^2) + bx + cy + d, \quad a \neq 0,$$

no es parte real (o imaginaria) de ninguna función analítica.

◀ Efectivamente, esto se deduce de las relaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4a \neq 0. \blacktriangleright$$

Compruébese si son armónicas en las regiones indicadas, las funciones dadas más abajo y hállese, cuando es posible, la función analítica según los datos de su parte real o imaginaria:

2.27. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

2.28. $v(x, y) = 2e^x \operatorname{sen} y$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

2.29. $u(x, y) = 2xy + 3$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

2.30. $v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $0 < |x| < \infty$.

2.31. $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$, $0 < |z| < \infty$.

2.32. $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

2.33. $v(x, y) = xy$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

§ 3. Aplicaciones conformes

1. Sentido geométrico del módulo y del argumento de la derivada. Sea $w = f(z)$ la función analítica en el punto z_0 y $f'(z_0) \neq 0$. Entonces $k = |f'(z_0)|$ es igual geométricamente al coeficiente de alargamiento en el punto z_0 para la aplicación $w = f(z)$ (más precisamente, para $k > 1$ tiene lugar el alargamiento y para $k < 1$, la contracción). El argumento de la derivada $\varphi = \arg f'(z_0)$ es igual geométricamente al ángulo, en el que hay que girar la tangente en el punto z_0 a cualquier curva suave L, que pasa por el punto z_0 para obtener la tangente en el punto $w_0 = f(z_0)$ a la imagen L' de esta curva, cuando la aplicación $w = f(z)$. En este caso, si $\varphi > 0$, el giro se realiza en sentido antihorario y si $\varphi < 0$, en sentido horario.

De este modo, el sentido geométrico del módulo y del argumento de la derivada consiste en que, si la aplicación la realiza la función analítica que satisface la condición $f'(z_0) \neq 0$, $k = |f'(z_0)|$, determina el coeficiente de transformación de semejanza del elemento

lineal infinitesimal en el punto z_0 y $\varphi = \arg f'(z_0)$ es el ángulo de giro de este elemento.

EJEMPLO 1. Hállense el coeficiente de alargamiento k y el ángulo de giro φ en el punto $z_0 = 1 - i$ para la aplicación $w = z^2 - z$.

◀ Puesto que $w' = 2z - 1$ y $w'|_{z=1-i} = 1 - 2i$, entonces

$$k = |1 - 2i| = \sqrt{5}$$

$$\varphi = \arg(1 - 2i) = -\operatorname{arctg} 2. \blacktriangleright$$

Hállense el coeficiente de alargamiento k y el ángulo de giro φ para las aplicaciones dadas $w = f(z)$ en los puntos indicados:

3.1. $w = z^2$, $z_0 = \sqrt{2}(1 + i)$. **3.2.** $w = z^2$, $z_0 = i$.

3.3. $w = z^3$, $z_0 = 1 + i$. **3.4.** $w = z^3$, $z_0 = 1$.

3.5. $w = \operatorname{sen} z$, $z_0 = 0$. **3.6.** $w = ie^{2z}$, $z_0 = 2\pi i$.

Determínese qué parte del plano complejo se alarga y qué parte se contrae para las aplicaciones siguientes,

3.7. $w = 1/z$. **3.8.** $w = e^{z-1}$.

3.9. $w = \ln(z + 1)$. **3.10.** $w = z^2 + 2z$.

Hállense los conjuntos de todos los puntos z_0, en los cuales para las aplicaciones siguientes el coeficiente de alargamiento es $k = 1$:

3.11. $w = (z - 1)^2$. **3.12.** $w = z^2 - iz$.

3.13. $w = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$. **3.14.** $w = -z^3$.

Hállense los conjuntos de todos los puntos z_0, en los cuales para las aplicaciones siguientes el ángulo de giro es $\varphi = 0$:

3.15. $w = -\dfrac{i}{z}$. **3.16*.** $w = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$.

3.17. $w = z^2 + iz$. **3.18.** $w = z^2 - 2z$.

2. Aplicaciones conformes. Funciones lineal y lineal fraccional. La aplicación biunívoca de la región D del plano (z) sobre la región G del plano (w) se llama *conforme*, si en todo punto de la región D posee propiedades de conservación de los ángulos y de constancia de alargamientos.

Criterio del carácter conforme de la aplicación. Para que la aplicación de la región D dada por la función $w = f(z)$ sea conforme, es necesario y suficiente que $f(z)$ sea una función unifoliada y analítica en la región D, además $f'(z) \neq 0$ en todos los puntos de D.

En adelante la imagen de la región D que se aplica por la función $w = f(z)$ se designa por E o por $f(D)$.

EJEMPLO 2. Muéstrese que la aplicación realizada por la función $w = z^3$ es conforme en la región

$$D = \left\{ z \mid 1 < |z| < 2, \quad 0 < \arg z < \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

◀ Es necesario comprobar si la función dada es analítica y unifoliada en D y si $f'(z) \neq 0$ en todos los puntos de D. La analiticidad de la función $w = z^3$ fue mostrada más arriba (véase el ejemplo 2 del § 2), la relación $w' = 3z^2 \neq 0$ para todo $z \in D$ es evidente. El carácter unifoliado se deduce de que la región D está dispuesta en el ángulo con vértice en el origen de coordenadas y de magnitud $\frac{2\pi}{3}$ (véase el problema 1.26). ▶

Aclárese qué funciones de las dadas $w = f(z)$ determinan las aplicaciones conformes de las regiones indicadas D:

3.19. $w = (z+i)^2$, $D = \left\{ z \mid 1 < |z+i| < 3, \quad 0 < \arg z < \frac{3}{2}\pi \right\}$.

3.20. $w = |z|^2$, $D = \{z \mid |z| < 1\}$.

3.21. $w = e^z$, $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$.

3.22. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $D = \left\{ z \mid \frac{1}{2} < |z| < 1 \right\}$.

3.23. $w = (z-1)^3$, $D = \{z \mid |z-1| < 1\}$.

La aplicación realizada por la función lineal $w = az + b$ está estudiada más arriba (véase el ejemplo 1 del § 1). Esta representa una composición del alargamiento ($w_1 = |a|z$), del giro ($w_2 = e^{i \arg a} w_1$) y de la traslación paralela ($w_3 = w_2 + b$). La inversa a la función lineal es también una función lineal $z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$. Puesto que $w' = a \neq 0$, entonces la aplicación w es conforme en todo el plano ampliado, además tiene dos puntos inmóviles $z_1 = \frac{b}{1-a}$ (para $a \neq 1$) y $z_2 = \infty$.

EJEMPLO 3. Aclárese si existe la función lineal que aplica el triángulo con vértices 0, 1, i en el plano (z) sobre el triángulo con vértices 0, 2, $1 + i$ en el plano (w).

◀ Señalemos que el triángulo con vértices 0, 1, i es semejante al triángulo con vértices 0, 2, $1 + i$, con la particularidad de que el vértice en el punto $z_1 = 0$ corresponde al vértice en el punto $w_1 = 1 + i$, el vértice en el punto $z_2 = 1$ corresponde al vértice en el punto $w_2 = 0$ y el vértice en el punto $z_3 = i$, al vértice en el punto $w_3 = 2$. Realicemos sucesivamente las transformaciones

a) $w_1 = e^{\frac{5\pi i}{4}} z$ es un giro alrededor del origen de coordenadas en un ángulo $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ en el sentido antihorario;

b) $w_2 = \sqrt{2} w_1$ es homotecia con el coeficiente $k = \sqrt{2}$;

c) $w_3 = w_2 + (1 + i)$ es traslación paralela sobre el vector que representa el número complejo $1 + i$.

Como resultado el triángulo con vértices 0, 1, i se aplica sobre el triángulo con vértices 0, 2, $1 + i$ y la función lineal entera que realiza esta aplicación tiene la forma

$$w = w_3 \circ w_2 \circ w_1 = 2\sqrt{e^{-i\frac{5\pi}{4}}} z + (1 + i) =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z + 1 + i = (1 + i)(1 - z). \blacktriangleright$$

3.24. Demuéstrese que la aplicación realizada por la función lineal entera tiene dos puntos inmóviles (que coinciden si $a = 1$).

Para las aplicaciones indicadas más abajo hállense el punto inmóvil finito z_0 (si existe), el ángulo de giro φ y el coeficiente de homotecia k:

3.25. $w = 2z + 1$. **3.26.** $w = iz + 4$.

3.27. $w = e^{i\frac{\pi}{4}} z - e^{-i\frac{\pi}{4}}$. **3.28.** $w = az + b$.

La función lineal fraccional

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0,$$

realiza la aplicación conforme del plano ampliado (z) sobre el plano ampliado (w). En este caso por ángulo entre las curvas en el punto $z = \infty$, se entiende el ángulo en el punto $z^* = 0$ entre las imágenes de estas curvas, obtenidas mediante la aplicación $z^* = \frac{1}{z}$. La función lineal fraccional elemental (distinta de la lineal) es la función $w = \frac{1}{z}$ que puede ser representada en la forma de composición de la inversión respecto a la circunferencia unitaria $w_1 = \frac{1}{z}$ y a la conjugación compleja $w_2 = w_1$. La función lineal fraccional elemental aplica las circunstancias del plano (z) en las circunferencias del plano (w) (la recta se considera como circunferencia de radio infinito). Puesto que la función lineal fraccional general se representa en la forma de composición de la función lineal $w_1 = cz + d$, de la lineal fraccional elemental $w_2 = \frac{1}{w_1}$ y de nuevo de la lineal $w_3 = \frac{bc - ad}{c} w_2 + \frac{a}{c}$, entonces ella también aplica la circunferencia en la circunferencia.

La función lineal fraccional se define completamente si están dadas las aplicaciones de tres puntos $z_1 \to w_1$, $z_2 \to w_2$ y $z_3 \to w_3$:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}. \qquad (1)$$

OBSERVACION. Si uno de los puntos z_1, z_2 ó z_3 o bien w_1, w_2 ó w_3 es un punto infinitamente alejado, entonces en la fórmula (1) todas las diferencias que contienen este punto deben ser sustituidas por unidades.

EJEMPLO 4. Hállese la imagen de la circunferencia $x^2+y^2=2x$ para la aplicación $w=\dfrac{1}{z}$.

▶ Poniendo $z=x+iy$ tenemos $x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la circunferencia, hallamos

$$x^2+y^2-2x=z\cdot\bar{z}-(z+\bar{z})=0,$$

y después del cambio $z=\dfrac{1}{w}$ tenemos

$$\frac{1}{w\bar{w}}-\frac{1}{w}-\frac{1}{\bar{w}}=0,$$

es decir, $w+\bar{w}=1$. Si $w=u+iv$, entonces $u+\bar{w}=2u$. De este modo la circunferencia $x^2+y^2-2x=0$ se transforma en la recta $u=1/2$ paralela al eje imaginario. ▶

EJEMPLO 5. Hállese la aplicación lineal fraccionaria que hace pasar los puntos -1, i, $i+1$ en el punto 0, $2i$, $1-i$.

◀ Empleando la fórmula (1) tenemos

$$\frac{w-0}{w-2i}\cdot\frac{1-i-2i}{1-i-0}=\frac{z+1}{z-i}\cdot\frac{i+1-i}{i+1+i},$$

de donde

$$\frac{w}{w-2i}=\frac{1}{5}\,\frac{z+1}{z-i}$$

y

$$w=-\frac{2i(z+1)}{4z-5i-1}. \blacktriangleright$$

Hállense las imágenes de las siguientes líneas para las aplicaciones $w=\dfrac{1}{z}$:

3.29. De la circunferencia $x^2+y^2=y$.

3.30. De la recta $y=-x/2$.

3.31. De la recta $y=x-1$.

3.32. De la circunferencia $x^2+y^2+2x-2y+1=0$.

3.33. Demuéstrese que la función $w = \frac{1}{z}$ transforma en una recta la circunferencia $A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy = 0$ que pasa por el origen de coordenadas y transforma a toda recta $Bx + Cy + D = 0$ en una circunferencia, que pasa por el origen de coordenadas.

Hállese la transformación homográfica a partir de las condiciones dadas:

3.34. Los puntos i, 1, $1 + i$ pasan a puntos 0, ∞, 1.

3.35. Los puntos 1 e i son inmóviles y el punto 0 pasa a ∞.

3.36. El punto $\frac{1}{2}$ y 2 son inmóviles y $\frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$ pasan a ∞.

3.37. Demuéstrese que la transformación homográfica $w = \frac{az+b}{cz+d}$ tiene dos puntos inmóviles. ¿Cuál es la condición de coincidencia de estos puntos? ¿Cuándo el punto infinitamente alejado es inmóvil?

Los puntos z_1 y z_2 se llaman simétricos respecto a la recta, si están situados sobre la perpendicular a esta recta a distintos lados de ella y a distancias iguales.

Los puntos z_1 y z_2 se llaman *simétricos respecto a la circunferencia*, si están situados sobre un rayo que sale del centro de esta circunferencia, a distintos lados de ella y de tal modo que el producto de las distancias de estos puntos al centro, es igual al cuadrado del radio.

Los puntos M y N simétricos respecto a la recta o la circunferencia en el plano (z) se aplican por la función lineal fraccionaria en los puntos M' y N', simétricos respecto a la imagen de esta recta o la circunferencia en el plano (w).

3.38. Hállense los puntos simétricos al punto $1 + i$ respecto a las circunferencias:

a) $|z| = 1$; b)* $|z - i| = 2$.

3.39. Para la aplicación $w = \frac{z-i}{z+i}$ hállese la imagen del punto simétrico al punto $1 - i$ respecto a:

a) la recta $y = x$; b) la circunferencia $|z - 1| = 3$.

EJEMPLO 6. Hállese la aplicación del círculo $|z| < 1$ sobre el círculo $|w| < 1$ tal, que el punto $z = \alpha$ ($|\alpha| < 1$) se aplique en el centro del círculo $w = 0$.

◀ Escribamos la transformación homográfica en la forma

$$w = g\,\frac{z - z_0}{z - z_1}\,.$$

Ya que el punto $z = \alpha$ pasa al punto $w = 0$, entonces $z_0 = \alpha$ y puesto que el punto $w = \infty$ es simétrico al punto $w = 0$, entonces z_1 es simétrico al punto $z = \alpha$ respecto a la circunferencia $|z| = 1$, es decir, $z_1 = \frac{1}{\bar{\alpha}}$. Por eso

$$w = g\bar{\alpha}\,\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}\,.$$

Luego, el punto de la circunferencia $|z| = 1$ pasa al punto de la circunferencia $|w| = 1$ y por eso para $z = e^{i\varphi}$ tenemos

$$1 = |g\bar{\alpha}|\left|\frac{e^{i\varphi}-\alpha}{\bar{\alpha}e^{i\varphi}-1}\right|.$$

Pero

$$\left|\frac{e^{i\varphi}-\alpha}{e^{i\varphi}\bar{\alpha}-1}\right|^2=\frac{(e^{i\varphi}-\alpha)(e^{-i\varphi}-\bar{\alpha})}{(e^{i\varphi}\bar{\alpha}-1)(e^{-i\varphi}\alpha-1)}=$$

$$=\frac{1+|\alpha|^2-e^{i\varphi}\bar{\alpha}-e^{-i\varphi}\alpha}{|\alpha|^2+1-e^{i\varphi}\bar{\alpha}-e^{-i\varphi}\alpha}=1.$$

Por consiguiente, $|g\bar{\alpha}| = 1$, es decir, $|g\bar{\alpha}| = e^{i\theta}$ y la aplicación buscada tiene el aspecto

$$w = e^{i\theta}\,\frac{z-\alpha}{z\bar{\alpha}-1}\,. \blacktriangleright \qquad (2)$$

Para la aplicación (2) del círculo unitario sobre sí mismo hállense los parámetros α y θ según las condiciones dadas:

3.40. $w(1/2) = 0$, $\arg w'(1/2) = 0$.

3.41. $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = \pi/2$.

3.42. $w = (z_0) = 0$, $\arg w'(z_0) = \pi/2$.

3.43. Demuéstrese que la función

$$w = e^{i\theta}\,\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\,, \quad \operatorname{Im}\alpha > 0, \qquad (3)$$

aplica el semiplano superior sobre el círculo unitario.

Determínense los parámetros α y θ en la fórmula (3) según las condiciones dadas:

3.44. $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\pi/2$.

3.45. $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = \pi$.

3.46. $w(z_0) = 0$, $\arg w'(z_0) = \pi/2$.

Hállese la imagen E de la región D para la transformación homográfica:

3.47. $D = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$; $w = \dfrac{z-i}{z+i}$.

3.48*. $D = \left\{z \mid 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$: $w = \dfrac{1}{z-1}$.

3.49*. $D = \left\{z \mid 1 \leqslant |z| \leqslant 2,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right\}$; $w = 1 + \dfrac{1}{z}$.

3.50. $D = \{z \mid |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$; $w = i\,\dfrac{1-z}{1+z}$.

3.51. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$; $w = \dfrac{z-1}{z-2}$.

3.52. D es una lúnula (circular) comprendida entre las circunferencias $|z-1| = 1$, $|z-i| = 1$; $w = -\dfrac{z}{z-1-i}$.

3.53**. Hállese la región D en el plano (z), la cual para la aplicación $w = \dfrac{z}{1-z}$ se transforma en el interior del círculo $|w| < r$ del plano (w).

3. **Función potencial.** La aplicación realizada por la función potencial $w = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$), es conforme en el plano complejo ampliado en todos los puntos, excepto el punto $z = 0$ ($w'|_{z=0} = nz^{n-1}|_{z=0} = 0$). El ángulo $D = \left\{z \,\middle|\, \dfrac{2k\pi}{n} < \arg z < \dfrac{2(k+1)\pi}{n}\right\}$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$ se aplica biyectivamente por la función potencial sobre todo el plano (w) con el corte por la parte positiva del eje real (además, al rayo $\arg z = \dfrac{2k\pi}{n}$ le corresponde el extremo superior del corte y al rayo $\arg z = \dfrac{2(k+1)\pi}{n}$, el extremo inferior). La función inversa $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{\left(i\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}$, donde $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, es, como se sabe, multiforme. Su rama uniforme (formada por la representación de la imagen de uno de los puntos) aplica el plano (z) con el corte según la parte negativa del eje real, sobre el sector correspondiente

$$E = \left\{w \,\middle|\, \frac{2k\pi}{n} < \arg w < \frac{2(k+1)\pi}{n}\right\},$$

k está fijo.

EJEMPLO 7. Hállese cómo se aplica el interior de la lúnula con vértices z_1 y z_2, formada por las circunferencias C_1 y C_2 sobre el círculo unitario.

◀ La transformación $w_1 = -\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ aplica el punto $z = \dfrac{z_1+z_2}{2}$ en el punto $w_1 = 1$, el punto $z = z_1$ en el cero y el punto $z = z_2$ en el infinito. De este modo, el segmento que une los puntos z_1 y z_2 se aplica sobre el semieje real positivo. Los arcos de las circunferencias que

forman la lúnula se aplican en los rayos $\arg w_1 = \alpha\pi$ y $\arg w_1 = -\beta\pi$. Por consiguiente, la región D se aplica sobre el sector $E_1 = \{w_1 \mid -\beta\pi < \arg w_1 < \alpha\pi\}$ (compárese con el problema 3.52). Giremos este sector en un ángulo $\beta\pi$, es decir, realicemos la transformación $w_2 = e^{i\beta\pi} w_1$ y elevemos la función obtenida a la potencia $\frac{1}{\beta+\alpha}$:

$$w_3 = (w_2)^{\frac{1}{\beta+\alpha}}.$$

El sector se aplicará en el semiplano superior. La función

$$w_4 = e^{i\theta} \frac{w_3 - w_3^0}{w_3 - \overline{w_3^0}}$$

aplica el semiplano sobre el círculo unitario. Las magnitudes w_3^0 y θ se determinan por la representación complementaria de la aplicación

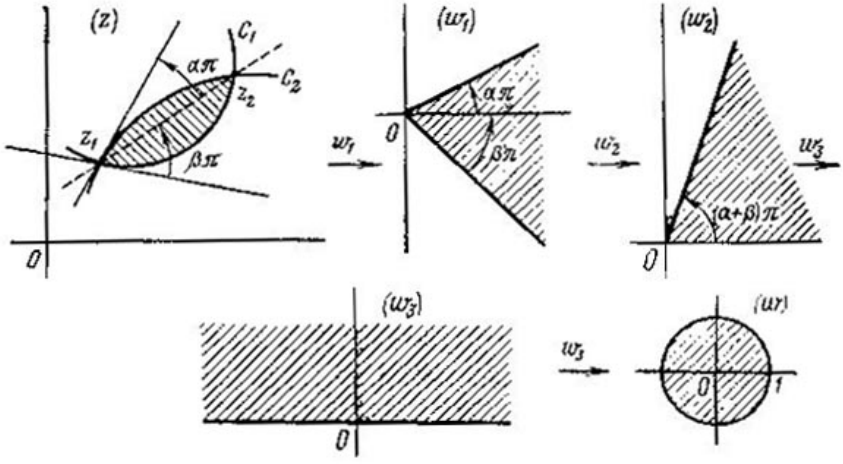


Fig. 94

del punto z_0 en el punto $w = 0$ y por la condición $\arg w'(z_0) = \gamma$. Definitivamente, $w = w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$ (fig. 94). ▶

Hállese la función que aplica la región dada D del plano (z) sobre el semiplano superior (en las respuestas se indica una de las funciones que realizan la aplicación dada, además, si la función es multiforme, entonces se tiene en cuenta una de sus ramas uniformes):

3.54. $D = \{z \mid |z| < 1, \ |z-1| < 1\}$.

3.55. $D = \left\{z \mid -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$.

3.56. $D = \{z \mid |z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$.

3.57. $D = \{z \mid |z| > 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$.

3.58. $D = \{z \mid |z| < 2,\ 0 < \arg z < \pi/4\}$.

3.59. $D = \{z \mid |z| > 2,\ 0 < \arg z < 3\pi/2\}$.

3.60. $D = \{z \mid |z| < 2,\ \operatorname{Im} z > 1\}$.

3.61. $D = \{z \mid |z| < 1,\ |z + i| < 1\}$.

3.62. $D = \{z \mid |z| < 1,\ |z - i| > 1\}$.

3.63. $D = \{z \mid |z| > 1,\ |z + i| < 1\}$.

3.64. D es el plano (z) cortado según el segmento $[-i,\ i]$.

3.65. D es el plano (z) cortado según el segmento que une los puntos $1 + i$ y $2 + 2i$.

3.66. D es el plano con corte según los rayos $(-\infty,\ -R]$ y $[R,\ +\infty)$, $R > 0$.

3.67. D es el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ cortado según el segmento que une los puntos 0 e ih $(h > 0)$.

4. Función de Zhukovski. Tenemos $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $w' = \frac{1}{2}\frac{z^2 - 1}{z^2}$. Por consiguiente, la función de Zhukovski [1] es conforme en todos los puntos del plano ampliado excepto los puntos $z_{1,2} = \pm 1$ y $z_3 = 0$. Ella aplica tanto el exterior, como el interior del círculo unitario del plano (z) sobre el plano (w) con corte por el segmento $[-1,\ 1]$. El plano completo (z) se aplica sobre la superficie de dos hojas de Riemann, pegada cruciformemente según los cortes $[-1,\ 1]$.

La función inversa

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

es biforme, además cada rama aplica el plano (w) con corte por el segmento $[-1,\ 1]$ sobre el interior o sobre el exterior del círculo unitario en el plano (z).

EJEMPLO 8. Hállese la imagen de la red polar $\rho = \text{const}$ y $\varphi = \text{const}$ para la transformación del plano (z) con ayuda de la función de Zhukovski.

◀ Poniendo $z = \rho e^{i\varphi}$, tenemos

$$w = u + iv = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho}\, e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \times$$

$$\times \cos\varphi + i\,\frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \operatorname{sen}\varphi.$$

---

[1] N. E. Zhukovski fue el primero en emplear la aplicación conforme realizada por la función $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, como método para obtener una sola clase de perfiles aerodinámicos, que recibieron el nombre de perfiles de Zhukovski. Los perfiles de Zhukovski se aplican sobre el círculo, para el cual es fácil resolver el problema del flujo corrientilíneo, lo que da la posibilidad de investigar el flujo corrientilíneo del ala de avión.

Por consiguiente,

$$u = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\operatorname{sen}\varphi$$

y para $\rho \neq 1$ tenemos

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2} = 1 \tag{4}$$

y

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2\varphi} = 1. \tag{5}$$

De estas igualdades concluimos que las circunferencias $|z| = \rho \neq 1$ se aplican en las elipses del plano (w) con los semiejes $a = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ y $b = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)$ para $\rho > 1$ ó $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)$ para $\rho < 1$. Los rayos $\varphi = \text{const}$ en el plano (z) se transforman, en las hipérbolas con los semiejes $a = |\cos\varphi|$ y $b = |\operatorname{sen}\varphi|$, en el plano (w).

Señalemos que las distancias focales $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ de las elipses (4) y $c_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$ de las hipérbolas (5) son iguales a 1, es decir, (4) y (5) son familias de elipses y hipérbolas confocales. ▶

EJEMPLO 9. Hállese la aplicación del plano (z) con los cortes por el segmento que une los puntos 0 y $4i$ y por el segmento que une los puntos $2i$ y $2 + 2i$, sobre el interior del círculo unitario $|w| < 1$.

◀ Hallamos la aplicación buscada w en forma de composición de cinco aplicaciones. La función $w_1 = z - 2i$ hace pasar el punto $z = 2i$ en el origen de coordenadas y la función $w_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} w_1$ gira el plano (w_1) en ángulo $\pi/2$. El punto $z = 4i$ pasa a consecuencia de estas aplicaciones al punto $w_2 = -2$; el punto $z = 2i$ al punto $w_2 = 0$; el punto $z = 2 + 2i$ al punto $w_2 = 2i$ y el punto $z = 0$ al punto $w_2 = 2$. Luego, como resultado de las aplicaciones $w_3 = w_2^2$ y $w_4 = w_3/4$ el corte se aplica en el segmento $[-1, 1]$ del plano (w_4) y, por fin,

$$w_5 = w_4 + \sqrt{w_4^2 - 1}$$

aplica el exterior del segmento $[-1, 1]$ sobre el interior del círculo unitario, con la particularidad de que se escoge la rama de esta función que para $w_4 = \infty$ se anula. Así pues, $w = w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$ (fig. 95). ▶

Hállense en los problemas 3.68—3.70 las imágenes de las regiones dadas para la aplicación $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

3.68. Del interior del círculo $|z| < R$ para $R < 1$ y del exterior del círculo $|z| > R$ para $R > 1$.

3.69. Del interior del círculo $|z| < 1$ con el corte por el segmento $[1/2, 1]$.

3.70. Del interior del círculo $|z| < 1$ con el corte por el segmento $[-1/2, 1]$.

3.71*. Hállese la aplicación del círculo $|z| < 1$ con el corte por el segmento $[1/3, 1]$ sobre el círculo $|w| < 1$.

3.72*. Hállese la aplicación de la región $D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0, |z| > R\}$ (el semiplano superior con el semicírculo eliminado) sobre el semiplano superior.

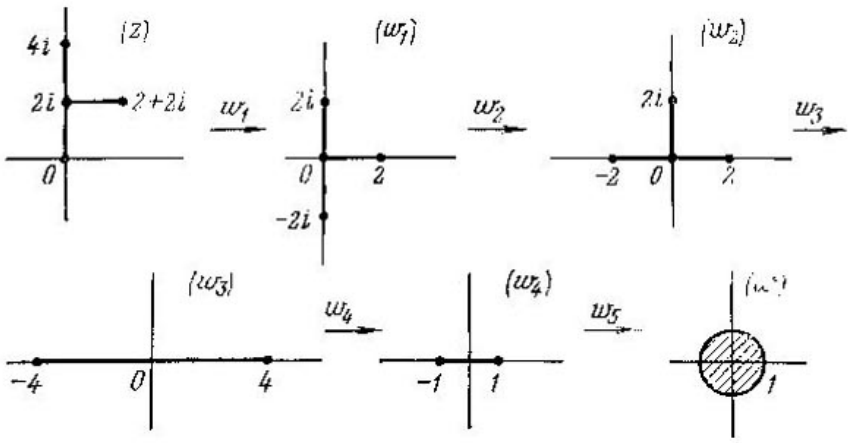


Fig. 95

3.73*. Aplíquese el exterior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ sobre el exterior del círculo unitario.

5. **Función exponencial.** La función $w = e^z$ es uniforme en cualquier franja de ancho menor que 2π, paralela al eje real.. Ella aplica la franja $-\infty < x < +\infty$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$ en el plano completo (w) con el corte por el semieje real negativo. Todo el plano se aplica sobre la superficie de Riemann de hoja infinita. La función inversa $z = \operatorname{Ln} w = \ln w + 2\pi n i$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, es uniforme sobre esta superficie de Riemann y su valor principal $\ln w = \ln |w| + i \arg w$ determina la aplicación conforme de todo el plano con el corte $(-\infty, 0]$ sobre la franja $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ de 2π de ancho, paralela al eje real.

EJEMPLO 10. Hállese la aplicación de la franja de ancho H, $0 < \operatorname{Re} z < H$, paralela al eje imaginario, sobre el círculo unitario del plano (w).

◀ La solución buscada la obtendremos, por ejemplo, con ayuda de la composición de aplicaciones:

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} z, \quad w_2 = \frac{\pi}{H} w_1, \quad w_3 = e^{w_2}, \quad w_4 = e^{i\theta} \frac{w_3 - w_3^0}{w_3 - \overline{w_3^0}}.$$

Al realizar sucesivamente estas aplicaciones la franja dada se transforma en las regiones, representadas en la fig. 96. ▶

Hállese la imagen E de la región D para la aplicación $w = e^z$:

3.74. $D = \{z \mid -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$.
3.75. $D = \{z \mid |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$.
3.76. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.
3.77. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.
3.78. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

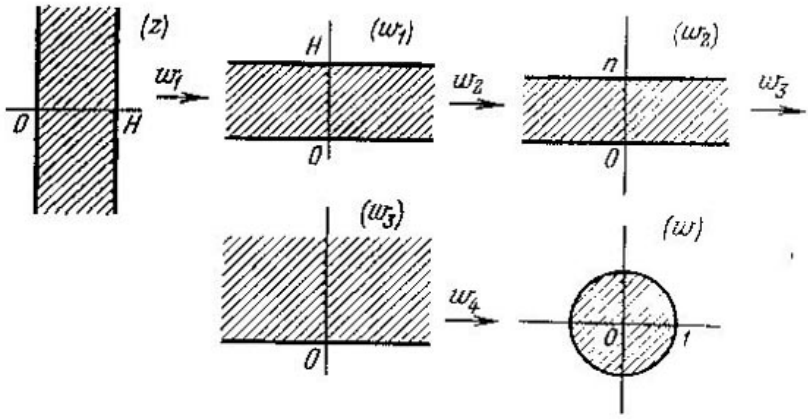


Fig. 96

3.79. Hállense las imágenes de las rectas $x = C$ e $y = C$ para la aplicación $w = e^z$.

Hállense las imágenes de las siguientes regiones para la aplicación $w = \operatorname{Ln} z$, $w(i) = \dfrac{\pi i}{2}$:

3.80. $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.
3.81. $\{z \mid |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.
3.82. $\{z \mid |z| < 1,\ z \notin [0, 1]\}$.
3.83. $\{z \mid z \notin [-\infty, -1] \cup [0, \infty]\}$.

6. **Funciones trigonométricas e hiperbólicas.** La función $w = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ es unifoliada en la semifranja $-\pi < x \leqslant \pi$, $y \geqslant 0$ y aplica esta semifranja sobre el plano (w) con el corte $(-\infty, 1]$. La superficie de Riemann de esta función es más compleja que la de las anteriores, ya que las hojas se pegan separadamente por el rayo $(-\infty, -1)$ y por el segmento $[-1, 1]$.

La función $w = \operatorname{sen} z$ se reduce a la anterior con ayuda de la relación $\operatorname{sen} z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$. A los $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ se reducen también las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{sh} z = -i \operatorname{sen} iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

3.84.** Hállese la imagen E de la semifranja $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ para la aplicación $w = \cos z$.

3.85. Hállese la imagen E de la red rectangular $x = C$, $y = C$ para la aplicación $w = \operatorname{ch} z$.

3.86. Hállese la imagen E del rectángulo $D = \{z \mid -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, -h < \operatorname{Im} z < h, h > 0\}$ para la aplicación $w = \cos z$.

§ 4. Integral de una función de variable compleja

1. **Integral por la curva y su cálculo.** Si l es una curva suave a trozos dirigida en el plano (z) y para todo $z \in l$ está determinada la función $f(z)$, entonces, si existe el límite en el segundo miembro, se supone según la definición:

$$\int_l f(z)\,dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k. \tag{1}$$

Aquí $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $z_k \in l$, $k = 0, 1, \ldots, n$, los puntos $\xi_k \in l$ están elegidos en los segmentos l entre los puntos z_k y z_{k+1}. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces la integral se representa en la forma de la suma de dos integrales curvilíneas de segunda especie:

$$\int_l f(z)\,dz = \int_l u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int_l v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy. \tag{2}$$

Si la función $f(z)$ es continua sobre l, entonces la integral (1) existe.

EJEMPLO 1. Valiéndose de la definición (1) calcúlese $\int_l \operatorname{Re} z\,dz$, donde l es el radio vector del punto $1 + i$.

◀ Dividamos el radio vector del punto $1 + i$ en n partes iguales, es decir, pongamos

$$z_k = \frac{k}{n} + i\,\frac{k}{n}, \quad \Delta z_k = \frac{1}{n}(1 + i), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

y sea $\xi_k = z_k$. Entonces la suma integral se escribe en la forma

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1+i}{n} = \frac{1+i}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1+i}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\int_l \operatorname{Re} z\, dz = \lim_{n\to\infty} \frac{(i+1)(n+1)}{2n} = \frac{1+i}{2} \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Empleando la representación de la integral en la forma (2) y la regla para calcular las integrales curvilíneas de segunda especie, calcúlese la integral

$$\int_l |z|\bar{z}\, dz,$$

donde l es la semicircunferencia superior $|z| = 1$ con el recorrido antihorario.

◀ Tenemos

$$\int_l |z|\bar{z}\, dz = \int_l \sqrt{x^2+y^2}\,(x\,dx + y\,dy) + i\int_l \sqrt{x^2+y^2}\,(-y\,dx + x\,dy).$$

Pasando a la ecuación paramétrica de la curva $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, y teniendo en cuenta que $\sqrt{x^2+y^2} = |z| = 1$ en los puntos de la curva, obtenemos

$$\int_l |z|\bar{z}\, dz = \int_0^{\pi} (-\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t)\, dt + i\int_0^{\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt = \pi i. \blacktriangleright$$

4.1. Aplicando la sumación directa calcúlese la integral $\int_l z\, dz$, donde l es el radio vector del punto $2-i$.

4.2. Demuéstrese que si el camino de integración cambia de dirección la integral cambia de signo, es decir,

$$\int_{l^+} f(z)\, dz = -\int_{l^-} f(z)\, dz.$$

4.3. Demuéstrese que si a_1 y a_2 son constantes, entonces $\int_l (a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z))\, dz = a_1 \int_l f_2(z)\, dz + a_2 \int_l f_2(z)\, dz$.

4.4. Demuéstrese que si la curva de integración l es una reunión de las curvas l_1 y l_2, entonces

$$\int_l f(z)\,dz = \int_{l_1} f(z)\,dz + \int_{l_2} f(z)\,dz.$$

4.5*. Demuéstrese que tiene lugar la estimación

$$\left|\int_l f(z)\,dz\right| \leqslant \int_l |f(z)|\,ds,$$

donde ds es la diferencial del arco.

Calcúlense las integrales según los contornos dados:

4.6*. $\int_l (z-z_0)^n\,dz$, n es un número entero, $l = \{z\colon |z-z_0| = R\}$.

4.7. $\int_l (z-z_0)^n\,dz$, n es un número entero, $l = \{z\colon |z-z_0| = R,\ \operatorname{Im}(z-z_0) > 0\}$.

4.8. $\int_l \frac{z}{\bar{z}}\,dz$, $l = \left\{z\colon |z| = 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.

2. Teorema de Cauchy. Fórmula integral de Cauchy. Si la función $f(z)$ es analítica en la región simplemente conexa D limitada por el contorno Γ, y γ es un contorno cerrado en D, entonces

$$\oint_\gamma f(\eta)\,d\eta = 0. \tag{3}$$

Si, además, la función $f(z)$ es continua en la región cerrada $\overline{D} = D + \Gamma$, entonces

$$\oint_\Gamma f(\eta)\,d\eta = 0, \quad \textit{(teorema de Cauchy)}.$$

Si la función $f(z)$ es analítica en la región múltiplemente conexa D, limitada por el contorno Γ y por los contornos $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ interiores respecto a Γ, y es continua en la región cerrada $\overline{D} = D + \Gamma^+ + \gamma_1^- + \ldots + \gamma_k^-$, donde los signos de los índices superiores significan la dirección de los recorridos (fig. 97), entonces

$$\oint_k f(\eta)\,d\eta = 0 \tag{4}$$

$$\Gamma^+ + \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu^-$$

(teorema de Cauchy para la región múltiplemente conexa).

Si la función $f(z)$ está definida y es continua en la región simplemente conexa D y es tal, que para cualquier contorno cerrado $\gamma \subset D$

$$\oint_{\gamma} f(\eta)\, d\eta = 0,$$

entonces para un $z_0 \in D$ fijo la función

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\eta)\, d\eta$$

es una función analítica en la región D, para la cual $\Phi'(z) = f(z)$.

La función $\Phi(z)$ se llama función primitiva o integral indefinida de $f(z)$, con la particularidad de que si $F(z)$ es una de las primitivas para $f(z)$, entonces

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\eta)\, d\eta = F(z_2) - F(z_1).$$

Si $f(z)$ es analítica en la región D, $z_0 \in D$ y $\gamma \subset D$ es un contorno que rodea el punto z_0, es válida la *fórmula integral de Cauchy*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\eta)}{\eta - z_0}\, d\eta. \qquad (5)$$

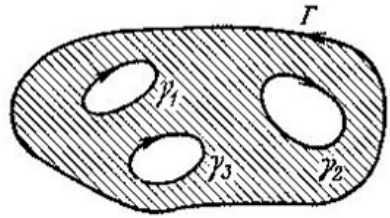


Fig. 97

En este caso la función $f(z)$ tiene en todos los puntos de D derivadas de cualquier orden, para las cuales son justas las fórmulas

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{k+1}}\, d\eta, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (6)$$

EJEMPLO 3. Demuéstrese que si $f(z)$ es una función analítica y acotada en la región convexa D, entonces para cualesquiera dos puntos z_1 y z_2 de esta región tiene lugar la estimación

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(\eta)\, d\eta \right| \leqslant \max_{z \in D} |f(z)|\, |z_2 - z_1|.$$

◀ De la convexidad de la región se deduce que si $z_1 \in D$, $z_2 \in D$, entonces el segmento que une estos puntos también pertenece a la región D. Del teorema de Cauchy se desprende que en calidad de camino de integración se puede tomar precisamente este segmento y, por ende, aplicando la estimación del problema 4.5, tenemos

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(\eta)\, d\eta \right| \leqslant \max_{z \in D} |f(z)| \left| \int_{z_1}^{z_2} ds \right| = |z_2 - z_1| \max_{z \in D} |f(z)|. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 4. Calcúlese la integral

$$\int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta^2} = F(z) - F(0),$$

si el camino de integración no abarca ninguno de los puntos $z_{1,2} = \pm i$.

◀ Ya que la función subintegral $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ es analítica en todos los puntos, excepto los puntos, $z_{1,2} = \pm i$, entonces la integral $F(z)$ tiene sentido en todos los puntos, excepto $z = \pm i$ y a condición de que el camino de integración no pasa por estos puntos. Por consiguiente, si el camino de integración no abarca ninguno de los puntos $z_{1,2} = \pm i$, entonces a título de una de las funciones primitivas para la función $\dfrac{1}{z^2+1}$ se puede tomar una función uniforme $F(z) = \operatorname{arctg} z$ y, teniendo en cuenta que $\operatorname{arctg} 0 = 0$, tenemos

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta^2}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 5. Calcúlese la integral

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\operatorname{sen} \frac{iz\pi}{2}}{z^2+1}\, dz.$$

◀ Escribamos la integral en la forma de

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\operatorname{sen} \frac{iz\pi}{2}}{\frac{z+i}{z-i}}\, dz$$

y utilizando la fórmula de Cauchy (5), hallamos

$$I = 2\pi i \left.\frac{\operatorname{sen} \frac{iz\pi}{2}}{z+i}\right|_{z=i} = 2\pi i \frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2i} = -\pi. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Calcúlese la integral

$$I = \oint_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\, dz.$$

◀ Puesto que en el interior del contorno de integración el denominador de la función subintegral se reduce a cero en los puntos $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$, analicemos la región múltiplemente conexa D, limitada por la circunferencia $\Gamma = \{z \mid |z-2| = 3\}$ y por los contornos

interiores $\gamma_1 = \{z \mid |z| = \rho\}$ y $\gamma_2 = \{z \mid |z - 1| = \rho\}$ $(0 < \rho < 1/2)$. Entonces en esta región D la función $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$ es analítica y según la fórmula (4) podemos escribir

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_1^-} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2^-} f(z)\,dz = 0,$$

de donde se desprende que

$$I = \oint_{\Gamma^+} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz = \oint_{\gamma_1^+} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz + \oint_{\gamma_2^+} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz.$$

Aplicando ahora las fórmulas (6) y (5), respectivamente, hallamos

$$\oint_{\gamma_1^+} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)''\Big|_{z=0} = \pi i\,\frac{e^z(z^2-4z+5)}{(z-1)^3}\Big|_{z=0} = -5\pi i$$

y

$$\oint_{\gamma_2^+} \frac{e^z/z^3}{z-1}\,dz = 2\pi i\,\frac{e^z}{z^3}\Big|_{z=1} = 2\pi e i.$$

De este modo, $I = \pi i(2e - 5)$. ▶

Calcúlense las integrales (los contornos se recorren en sentido antihorario):

4.9. a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i}\,dz$; b) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{z^2}{z-2i}\,dz$.

4.10. $\displaystyle\oint_{|z+i|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{(z+i)^3}\,dz$. **4.11.** $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+2z}$.

4.12. $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$, donde:

a) $C = \{z \mid |z-1| < 1\}$; b) $C = \{z \mid |z+1| < 1\}$;

c) $C = \{z \mid |z| = R,\ R \neq 1\}$.

4.13. $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz$.

4.14. Demuéstrese el teorema del valor medio: si la función $f(z)$ es analítica en el círculo $|z - z_0| < R$ y es continua en el círculo cerrado $|z - z_0| \leq R$, el valor de la

función en el centro del círculo es igual a la media aritmética de sus valores en la circunferencia, es decir,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi R}\oint_{|\eta - z_0| = R} f(\eta)\,ds,$$

donde ds es la diferencial del arco.

4.15*. Es conocido que si $f(z) \not\equiv \text{const}$ es una función analítica en la región D y continua en la región cerrada $\overline{D} = D + L$, $\max\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)|$ se alcanza sólo en la frontera de la región (principio del máximo del módulo). Demuéstrese que si, además, $\forall\, z \in \overline{D}$ $(f(z) \neq 0)$, entonces $\min\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)|$ también se alcanza en la frontera.

4.16. Utilizando la fórmula (6) para $f'(z)$ demuéstrese el teorema de Liouville: si $f(z)$ es una función analítica y acotada por todo el plano (z), entonces $f(z) \equiv \text{const}$.

RESPUESTAS

1.1. El interior del círculo con el centro en el punto z_0 de radio R; simplemente conexa. **1.2.** El anillo entre las circunferencias de los radios 1 y 2 con el centro en el punto $z_0 = i$; doblemente conexa. **1.3.** El exterior del círculo de radio 2 con el centro en el punto $z_0 = i$, con el punto reducido infinitamente alejado; doblemente conexa. **1.4.** La franja horizontal comprendida entre las rectas $y = -1/2$ e $y = \infty$; simplemente conexa. **1.5.** El exterior del radio R con el centro en el punto z_0; simplemente conexa. El punto infinitamente alejado $z = \infty$ es el punto interior de esta región. **1.6.** El interior del círculo con el centro reducido $z_0 = -i$ de radio 2; doblemente conexa. **1.7.** El semiplano situado más a la izquierda de la recta $x = 1$. **1.8.** El interior del círculo de radio 2 con el centro en el punto (2, 0); simplemente conexa. **1.9.** La recta $x - y + 1 = 0$.

● Escríbase $\dfrac{z+1}{z-i}$ en la forma $\dfrac{(z+1)(\bar{z}+i)}{(z-i)(\bar{z}+i)} = \dfrac{(z+1)(\bar{z}+i)}{|z-i|^2}$. **1.10.** El interior de la elipse $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. **1.11.** La circunferencia $|z| = 2$. **1.12.** La parte del plano situada a la derecha de la rama izquierda de la hipérbola $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. **1.13.** La recta que pasa por los puntos z_1 y z_2 con un segmento recortado que une estos puntos. **1.14.** El interior del segmento que une los puntos $-i$ e i. ● Empléese la igualdad $\arg(-z) = \pi + \arg z$. **1.15.** $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$. **1.16.** $\operatorname{Re} z < 0$. **1.17.** $|\operatorname{Re} z| < 3$.

1.18. $|z-(1+i)|+|z-(3+i)|<6$. **1.19.** $\frac{3\pi}{6}<\arg(z-z_0)<\frac{5\pi}{8}$. **1.20.** $2\varphi+4k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$ **1.21.** $3\varphi+6k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$ **1.22.** $\frac{1}{3}\psi+\frac{2k\pi}{3}$, $k=0, \pm 1, \ldots$, donde $\operatorname{tg}\psi=\frac{r\operatorname{sen}\varphi}{1+r\cos\varphi}$, $\operatorname{sen}\psi=$ $=\frac{r\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1+r^2+2r\cos\varphi}}$. **1.23.** $\frac{1}{2}\psi+k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$, donde $\operatorname{tg}\psi=$ $=\frac{r\operatorname{sen}\varphi}{r\cos\varphi-8}$, $\operatorname{sen}\psi=\frac{r\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{64+r^2-16r\cos\varphi}}$. **1.24.** $\frac{1}{2}\psi+k\pi$, $k=$ $=0, \pm 1, \ldots$, donde $\operatorname{tg}\psi=\frac{r^2\operatorname{sen}2\varphi}{r^2\cos 2\varphi-4}$, $\operatorname{sen}\psi=\frac{r^2\operatorname{sen}2\varphi}{\sqrt{r^4+16-8r^2\cos 2\varphi}}$. **1.25.** $\frac{1}{2}\psi+k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$ donde $\operatorname{tg}\psi=\frac{3r\operatorname{sen}\varphi}{r^2-2-r\cos\varphi}$, $\operatorname{sen}\psi=$ $=\frac{3r\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{9r^2\operatorname{sen}^2\varphi+(r^2-2-r\cos\varphi)^2}}$. **1.26.** Cualquier región situada dentro del ángulo con vértice en el origen de coordenadas y una abertura no mayor que π/n. **1.27.** Cualquier región situada en la franja paralela al eje real y de ancho no mayor que 2π. **1.28.** Cualquier región situada en la franja paralela al eje imaginario y de ancho no mayor que $2\pi/3$. **1.29.** Cualquier región situada bien sea en el interior del círculo unitario ($|z|<1$), o bien fuera de él ($|z|>1$). ● La igualdad $z_1+\frac{1}{z_1}=z_2+\frac{1}{z_2}$ para $z_1\neq z_2$ se cumple sólo en el caso, cuando $z_2=\frac{1}{z_1}$. **1.30.** a) La recta $x=C$ se aplica en la parábola $v^2=4C^2\times$ $\times(C^2-u)$; la circunferencia $|z|=R$ en la circunferencia $|w|=$ $=R^2$ recorrida dos veces; el rayo $\arg z=\alpha$ en el rayo $\arg w=2\alpha$; el semicírculo $|z|<r$, $\operatorname{Im} z>0$ en el círculo $|w|<r^2$ con el corte por el segmento del eje real positivo.

b) ◀ Los puntos situados en la recta $x=C$ se escriben en la forma $z=C+iy$ y por eso $w=\frac{1}{C+iy}=\frac{C}{C^2+y^2}-i\frac{y}{C^2+y^2}$. De aquí $u=\frac{C}{C^2+y^2}$, $v=-\frac{y}{C^2+y^2}$, $u^2+v^2=\frac{1}{C^2+y^2}=\frac{u}{C}$. Por consiguiente, la imagen de la recta $x=C$ es la circunferencia u^2+v^2- $-\frac{u}{C}=0$. La imagen de la circunferencia $|z|=R$ es la circunferencia $|w|=\frac{1}{R}$. El rayo $\arg z=\alpha$, es decir, el rayo $(0, \infty\cdot e^{i\alpha})$ se aplicará en el rayo $(0, \infty\cdot e^{-i\alpha})$ que va del infinito. El semicírculo $|z|<r$, $\operatorname{Im} z>0$, se aplica en el semiplano inferior con el semicírculo cortado $|w|=\leqslant\frac{1}{r}$, $\operatorname{Im} w<0$. ▶ **1.31.** $f(z)$ es continua en D si $\forall\varepsilon>0\,\forall z\in D\,\exists\delta=\delta(\varepsilon, z)>0\,((|\Delta z|<\delta\wedge z+\Delta z\in D)\Rightarrow$ $\Rightarrow|f(z+\Delta z)-f(z)|<\varepsilon)$. **1.36.** ch 1 cos 1 + i sh 1 sen 1.

1.37. $\cos 1$. **1.38.** $\operatorname{sh} 2 \cos 1 + i \operatorname{ch} 2 \operatorname{sen} 1$. **1.39.** $(2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.40. $\frac{\pi}{2}$. **1.41.** $\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.42.** $\operatorname{Arcsen} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$, $\operatorname{Arcsen} i = 2k\pi - i \ln(\sqrt{2}-1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.43.** $\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$, $\operatorname{Arctg} \frac{i}{3} = k\pi + \frac{i}{2} \ln 2$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.44.** $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$, $\operatorname{Arsh} i = \left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.45.** $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$, $\operatorname{Arch}(-1) = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.46.** $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$, $\operatorname{Arth}(1-i) = \frac{1}{4} \ln 5 + \frac{i}{2} \operatorname{arctg} 2 + \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.47.** $e^{2k\pi}(\cos \ln 2 + i \operatorname{sen} \ln 2)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.48.** $e^{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.49.** $e^{\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi}\left(\cos \frac{\ln 2}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\ln 2}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.50.** $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.51.** $5e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2k\pi}\left(\cos\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.52.** $-5e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+(2k+1)\pi}\left(\cos\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.53.** $f(0) = 0$. **1.54.** $f(0) = 0$. **1.55.** $f(0) = 0$. **1.56.** $\lim_{z \to 0} f(z)$ no existe.

2.1. No es diferenciable en ningún punto. ● $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ no existe. **2.2.** No es diferenciable en ningún punto. ● Para $\Delta y = k\Delta x$ tenemos $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{1+ik}$, es decir, el límite no existe. **2.3.** Es diferenciable sólo en el punto $z=0$. **2.4.** Es diferenciable sólo en el punto $z=0$. **2.5.** No es diferenciable en ningún punto. ◀ En el punto $z=0$ $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z| - |z|}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z|}{\Delta z}$ no existe. Si es que $z \neq 0$, entonces, designando $|z| = r$, $\Delta z = \Delta\rho e^{i\varphi}$, tenemos

$$\frac{|z+\Delta z| - |z|}{\Delta z} = \frac{r\left(\sqrt{1 + \frac{2\Delta\rho}{r^2}(x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi) + \left(\frac{\Delta\rho}{r}\right)^2} - 1\right)}{\Delta\rho e^{i\varphi}}.$$

De aquí hallamos $\lim_{\Delta\rho \to 0} \frac{r\left(\sqrt{1 + 2\frac{\Delta\rho}{r^2}x + \left(\frac{\Delta\rho}{r}\right)^2} - 1\right)}{\Delta\rho} = \frac{x}{r}$

para $\varphi=0$ y $\lim\limits_{i\Delta\rho\to 0}\dfrac{r\left(\sqrt{1+2\dfrac{\Delta\rho}{r}y+\left(\dfrac{\Delta\rho}{r}\right)^2}-1\right)}{\Delta\rho}=-\dfrac{iy}{r}$ para $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. De este modo, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|z+\Delta z|+|z|}{\Delta z}$ no existe. ▶ **2.6.** Es diferenciable sólo en el punto $z=1$. **2.7.** ◉ Empléese la regla de la diferenciación de la función compuesta de dos variables $u(x, y)=u(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)$, $v(x, y)=v(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)$ y la condición (1): $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi-\dfrac{\partial v}{\partial x}\operatorname{sen}\varphi$ y $\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=$ $=-\dfrac{\partial v}{\partial x}r\operatorname{sen}\varphi+\dfrac{\partial v}{\partial y}r\cos\varphi$, es decir, $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}$. Análogamente se comprueba la segunda de las igualdades (2). Para obtener las igualdades (4) es conveniente expresar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ mediante las derivadas por r y φ, obténgause las derivadas $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ a partir de las igualdades $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ y sustitúyanse las expresiones obtenidas en (3). **2.8.** $(e^{3z})'=3e^{3z}$. **2.9.** $(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z$. **2.10.** $(z^n)'=nz^{n-1}$ (excepto el punto $z=0$ para n negativos). **2.11.** $(\cos z)'=-\operatorname{sen} z$. **2.12.** $(\ln(z^2))'=2/z$. **2.13.** $\left(\operatorname{sen}\dfrac{z}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}\times$ $\times\cos\dfrac{z}{3}$. **2.14.** ◉ Hágase uso de las condiciones de Cauchy—Riemann. **2.17.** Todo el plano, excepto los puntos $z=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $(\operatorname{tg} z)'=\dfrac{1}{\cos^2 z}$. **2.18.** Todo el plano; $f'(z)=e^{-z}(1-z)$. **2.19.** Todo el plano, excepto los puntos $z_{1,2}=\pm i$; $f'(z)=$ $=\dfrac{(1-z^2)\cos z-z(1+z^2)\operatorname{sen} z}{(1+z^2)^2}$. **2.20.** Todo el plano excepto los puntos $z_\nu=2\pi\nu i$, $\nu\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=-\dfrac{2e^z}{(e^z-1)^2}$. **2.21.** Todo el plano, excepto los puntos $z_\nu=\dfrac{\pi}{2}\nu$; $\nu\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=\cos 2z$. **2.22.** Todo el plano, excepto el punto $z=0$; $f'(z)=\dfrac{e^z(z-1)}{z^2}$. **2.23.** Todo el plano, excepto los puntos $z_k=\pi ki$, $k\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$. **2.24.** Todo el plano, excepto los puntos $z_k=\left(k+\dfrac{1}{4}\right)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=$ $=\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} 2z}$. **2.26.** $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$. **2.27.** $\Delta u=0$.

$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + C$, $f(z) = (x+iy)^3 + Ci = z^3 + Ci$. **2.28.** $\Delta v \equiv 0$, $u(x, y) = 2e^x \cos y + C$, $f(z) = 2e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) + C = 2e^z + C$. **2.29.** $\Delta u = 0$, $v(x, y) = -x^2 + y^2 + C$, $f(z) = -i(x^2 - y^2 + 2ixy) + 3 + Ci = -iz^2 + 3 + Ci$. **2.30.** $\Delta v \equiv 0$, $u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + C$, $f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C = \ln|z| + i \arg z + C = \ln z + C$. **2.31.** $\Delta u = 0$, $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + 2x + C$, $f(z) = \frac{x - iy}{x^2+y^2} - 2y + 2ix + Ci = \frac{1}{z} + 2iz + Ci$. **2.32.** $\Delta u \equiv 0$, $v(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + 2xy + C$, $f(z) = z^2 - \frac{i}{2}z^2 + Ci = \frac{2-i}{2}z^2 + Ci$. **2.33.** $\Delta v \equiv 0$, $u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C$, $f(z) = \frac{1}{2}z^2 + C$.

3.1. $k = 4$, $\varphi = \pi/4$. **3.2.** $k = 2$, $\varphi = \pi/2$. **3.3.** $k = 6$, $\varphi = \pi/2$. **3.4.** $k = 3$, $\varphi = 0$. **3.5.** $k = 1$, $\varphi = 0$. **3.6.** $k = 2$, $\varphi = \pi/2$. **3.7.** La región $|z| > 1$ se contrae, mientras que la región $|z| < 1$ se alarga. **3.8.** El semiplano $\operatorname{Re} z < 1$ se contrae y el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$ se alarga. **3.9.** La región $|z+1| > 1$ se contrae y la región $|z+1| < 1$ se alarga. **3.10.** El interior del círculo $|z+1| < 1/2$ se contrae y el exterior de este círculo se alarga. **3.11.** $|z-1| = 1/2$. **3.12.** $\left|z - \frac{i}{2}\right| = 1/2$. **3.13.** $|z+i| = \sqrt{2}$. **3.14.** $|z| = 1/\sqrt{3}$. **3.15.** $\{z \mid \operatorname{Im}(1-i)z = 0\}$, es decir, la recta $y = x$. **3.16.** $\{z \mid \operatorname{Im}(1+i)(i+z) = 0\}$, es decir, la recta $x + y + 1 = 0$. ● Empléese la igualdad $\arg\frac{-i}{(i+z)^2} = \frac{3\pi}{2} - 2\arg(i+z) = 0$ y la relación $-\frac{3\pi}{4} = \arg(-1-i)$. **3.17.** El rayo $0 < x < +\infty$, $y = -1/2$. **3.18.** El rayo $1 < x < +\infty$, $y = 0$. **3.19.** La aplicación es conforme. **3.20.** La aplicación no es conforme. **3.21.** La aplicación es conforme. **3.22.** La aplicación es conforme. **3.23.** La aplicación no es conforme. **3.25.** $z_0 = -1$, $\alpha = 0$, $k = 2$. **3.26.** $z_0 = 2(1+i)$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $k = 1$. **3.27.** $z_0 = -\frac{i}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $k = 1$. **3.28.** Para $a \neq 1$ $z_0 = \frac{b}{1-a}$, $\alpha = \arg a$, $k = |a|$. **3.29.** La recta $v = -3$. **3.30.** La recta $u - 2v = 0$. **3.31.** La circunferencia $u^2 + v^2 - u - v = 0$. **3.32.** La circunferencia $u^2 + v^2 + 2u + 2v + 1 = 0$. **3.34.** $w = i\frac{z-i}{z-1}$. **3.35.** $w = \frac{(i+1)z - i}{z}$. **3.36.** $w = \frac{(5-3i)z - 4}{4z - 5 - 3i}$. **3.37.** $z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$, $z_1 = z_2$ para $(a-d)^2 + 4bc = 0$. El punto infinitamente alejado es inmóvil

sólo cuando $c=0$, es decir, para la función lineal. 3.38. a) $\frac{1}{2}(1+i)$; b) $4+i$. ● El punto $1+i$ y el centro del círculo i están situados en la recta $y=1$. 3.39. a) $w|_{z=-1+i}=\frac{1+2i}{5}$; b) $w|_{z=1-3i}=\frac{81-2i}{65}$. 3.40. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\theta=\pi$. 3.41. $\alpha=0$, $\theta=-\frac{\pi}{2}$. 3.42. $\alpha=z_0$, $\theta=\frac{3\pi}{2}$. 3.44. $\alpha=i$, $\theta=0$. 3.45. $\alpha=2i$, $\theta=\frac{3\pi}{2}$. 3.46. $\alpha=z_0$, $\theta=\pi$. 3.47. $E=\{w\mid |w|<1,\ \operatorname{Im} w<0\}$ (la semicircunferencia inferior). 3.48. $E=\left\{w\left|\left|w-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|>\frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{Im} w<0\right.\right\}$

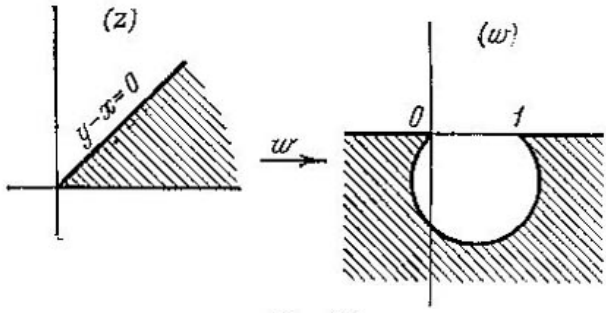


Fig. 98

(fig. 98). ● El rayo $0<x<+\infty$ se transforma en el exterior del segmento $0\leqslant u\leqslant 1$, además los puntos del semiplano superior (z) se aplican en los puntos del semiplano inferior (w). La recta $y-x=0$ se aplica en la circunferencia $w\bar{w}-\frac{1+i}{2}w+\frac{1-i}{2}\bar{w}=0$, es decir, en la circunferencia $\left|w-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ con el centro en el punto $w_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. 3.49. $E=\left\{w\left|\frac{1}{2}\leqslant|w-1|\leqslant 1,\ -\frac{\pi}{4}<\arg(w-1)\leqslant 0\right.\right\}$. ● La circunferencia $|z|=1$ se aplica en la circunferencia $|w-1|=1$, la circunferencia $|z|=2$ en la circunferencia $|w-1|=\frac{1}{2}$, el segmento $1\leqslant x\leqslant 2$ en el segmento $\frac{3}{2}\leqslant u\leqslant 2$ y la recta $y=x$ en la recta $u+v=1$ (fig. 99). 3.50. $E=\{w\mid \operatorname{Im} w>0,\ \operatorname{Re} w>0\}$. 3.51. $E=\left\{w\left|\left|w-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},\ \left|w-\frac{3}{4}\right|>\frac{1}{4}\right.\right\}$. 3.52. $E=\left\{w\left|-\frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{\pi}{4}\right.\right\}$.

3.53.

$$D=\begin{cases} z\,|\,\left|z+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right|<\dfrac{r}{1-r^2} & \text{para } r<1,\\ z\,|\,\operatorname{Re} z<\dfrac{1}{2} & \text{para } r=1,\\ z\,|\,\left|z-\dfrac{r^2}{r^2-1}\right|>\dfrac{r}{r^2-1} & \text{para } r>1. \end{cases}$$

◀ Ya que $|w|<r$, entonces de la relación $w(1-z)=z$ obtenemos $|z|<r|1-z|$. Elevando ambos miembros de esta desi-

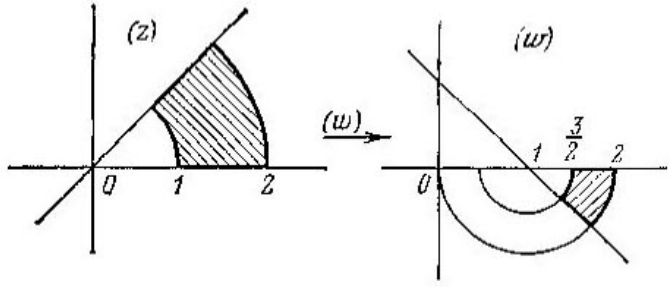


Fig. 99.

gualdad al cuadrado escribimos la desigualdad obtenida en forma de $z\bar{z}<r^2(1-z)(1-\bar{z})$ de donde obtenemos

$$(r^2-1)\,z\bar{z}-r^2(z+\bar{z})+r^2>0. \qquad (*)$$

Si $r<1$ entonces de (*) tenemos

$$z\bar{z}+\frac{r^2}{1-r^2}(z+\bar{z})<\frac{r^2}{1-r^2}\,. \qquad (**)$$

Pero $z\bar{z}+\dfrac{r^2}{1-r^2}(z+\bar{z})=\left(z+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right)\left(\bar{z}+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right)-\dfrac{r^4}{(1-r^2)^2}$.

Luego, ya que $\dfrac{r^4}{(1-r^2)^2}+\dfrac{r^2}{1-r^2}=\dfrac{r^2}{(1-r^2)^2}$ entonces de (**) obtenemos $\left|z+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right|^2<\left(\dfrac{r}{1-r^2}\right)^2$, es decir, $D=\left\{z\,|\,\left|z+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right|<\right.$ $\left.<\dfrac{r}{1-r^2}\right\}$ (el interior del círculo). Análogamente en el caso de $r>1$ hallamos $z\bar{z}-\dfrac{r^2}{r^2-1}(z+\bar{z})>-\dfrac{r^2}{r^2-1}$, es decir, $\left|z-\right.$ $\left.-\dfrac{r^2}{r^2-1}\right|^2>\dfrac{r^4}{(r^2-1)^2}-\dfrac{r^2}{r^2-1}=\dfrac{r^2}{(r^2-1)^2}$. Por consiguiente, $D=$ $=\left\{z\,|\,\left|z-\dfrac{r^2}{r^2-1}\right|>\dfrac{r}{r^2-1}\right\}$ (el exterior del círculo). Por fin, si

$r=1$, entonces de (*) obtenemos $z+\bar{z}<1$, es decir, $D=\left\{z \mid \operatorname{Re} z<\right.$ $\left.<\frac{1}{2}\right\}$ (un semiplano). ▶ 3.54. $w=-\frac{(z-z_1)^3}{(z-z_2)^3}$, $z_1=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 3.55. $w=e^{\frac{\pi i}{3}}\cdot z^{\frac{4}{3}}$. 3.56. $w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. 3.57. $w=$ $=-\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. 3.58. $w=\left(\frac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2$. 3.59. $w=-\left(\frac{z^{2/3}+\sqrt[3]{4}}{z^{2/3}+\sqrt[3]{4}}\right)^2$. 3.60. $w=-\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right)^3$. 3.61. $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^{3/2}$. 3.62. $w=\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^3$. 3.63. $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3$. 3.64. $w=\sqrt{\frac{z+i}{i-z}}$. 3.65. $w=\sqrt{\frac{z-1-i}{2+2i-z}}$. 3.66. $w=\sqrt{\frac{z+R}{z-R}}$. 3.67. $w=\sqrt{z^2+h^2}$. 3.68. Tanto el interior del círculo $|z|<R$ para $R<1$, como el exterior del círculo $|z|>R$ para $R>1$, se aplican sobre el exterior de la elipse $\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+$ $+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$. 3.69. El plano con corte por el segmento $[-1, 5/4]$. 3.70. El plano con corte por los rayos $(-\infty, -5/4]$, $[1, +\infty)$. 3.71. Una de las respuestas: $w=\frac{3}{8}\left(z+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{4}+$ $+\sqrt{\left(\frac{3}{8}\left(z+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{4}\right)^2-1}$ (con la particularidad de que se elige la rama que pasa el punto $z=0$ al interior del círculo $|w|<$ <1). ● $w_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $w_2=\frac{3w_1-1}{3}$, $w_3=\frac{3}{4}w_2$, $w_4=$ $=w_3+\sqrt{w_3^2-1}$, $w=w_4\circ w_3\circ w_2\circ w_1$. 3.72. $w=\frac{1}{2R}\left(z+\frac{R^2}{z}\right)$. ● Realícese la transformación de semejanza $w_1=\frac{z}{R}$ y para la aplicación $w_2=\frac{1}{2}\left(w_1+\frac{1}{w_1}\right)$ obsérvese la transformación de la frontera de la región. 3.73. $w=\frac{1}{a+b}(z+\sqrt{z^2-c^2})$ donde $c=$ $=\sqrt{a^2-b^2}$. ● Realizando la transformación de semejanza $w_1=$ $=\frac{z}{c}$ y determinando R a partir de la condición $\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)=$

$= \frac{a}{c}$, $\frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right) = \frac{b}{a}$, hallamos $w_2 = w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1}$ y $w_3 = \frac{1}{R} w_2$. 3.74. $E = \{w \mid \operatorname{Im} w < 0\}$. 3.75. $E = \{w \mid |\operatorname{Re} w > 0\}$. 3.76. $E = \{w \mid |w| > 1, \ w \notin [1, +\infty]\}$. 3.77. $E = \left\{w \mid |w| > 1, \ 0 < \arg w < \frac{\pi}{2}\right\}$. 3.78. $E = \{w \mid 1 < |w| < e, \ \operatorname{Im} w > 0\}$. 3.79. Si $w = \rho e^{i\psi}$, entonces la recta $x = C$ se aplica en la circunferencia $\rho = e^C$ por la que pasa un número infinito de veces y la recta $y = C$ en el rayo $\psi = C$. 3.80. $E = \{w \mid 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$. 3.81. $E =$

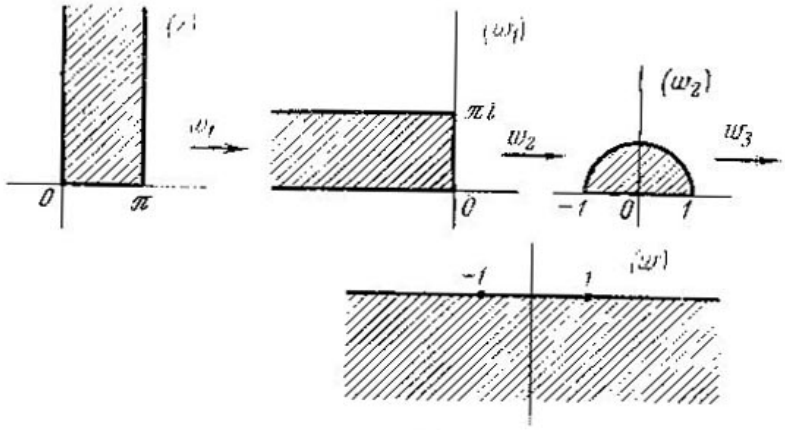


Fig. 100

$= \{w \mid \operatorname{Re} w < 0, \ 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$. 3.82. $E = \{w \mid \operatorname{Re} w < 0, \ 0 < \operatorname{Im} w < 2\pi\}$. 3.83. $E = \{w \mid 0 < \operatorname{Im} w < 2\pi, \ w \neq u + i\pi$ para $u > 0\}$. 3.84. $E = \{w \mid \operatorname{Im} w < 0\}$.

◀ Represéntese $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ en forma de composición de las aplicaciones $w_1 = iz$, $w_2 = e^{w_1}$, $w_3 = \frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right)$ (fig. 100).

▶ 3.85. Las rectas $x = C$ se transforman en elipses $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ donde $a^2 = \frac{1}{4}(e^C + e^{-C})^2 = (\operatorname{ch} C)^2$, $b^2 = \frac{1}{4}(e^C - e^{-C})^2 = (\operatorname{sh} C)^2$, y las rectas $y = C$ en las hipérbolas $\frac{u^2}{\cos^2 C} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2 C} = 1$. 3.86. Puesto que la región D contiene puntos con partes imaginarias simétricas, entonces el campo de valores E será biforme: cada uno de los rectángulos $D_1 = \{z \mid -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, \ -h < \operatorname{Im} z < 0$ y $D_2 = \{z \mid -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, \ 0 < \operatorname{Im} z < h\}$ se aplicará sobre la mitad infe-

rior del interior de la elipse $\frac{u^2}{\frac{1}{4}(e^h+e^{-h})^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}(e^h-e^{-h})^2}=$ $=1$, $v<0$.

4.1. $\frac{(2-i)^2}{2}$. **4.5.** ● Estímese la suma integral (1) y tomando en consideración que $|\Delta z_k| \leqslant \Delta s_k$, pásese al límite para máx $\Delta s_k \to 0$. **4.6.** $\oint\limits_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0 \text{ para } n \neq -1, \\ 2\pi i \text{ para } n=-1. \end{cases}$ ● Realícese el cambio de la variable $z-z_0=Re^{i\theta}$. **4.7.** $\int\limits_{\substack{|z-z_0|=R \\ 0\leqslant \arg(z-z_0)\leqslant\pi}} (z-z_0)^n\,dz =$

$$= \begin{cases} \pi i \text{ para } n=-1, \\ 0 \text{ para } n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq -1, \\ -\frac{2R^{2k+1}}{2k+1} \text{ para } n=2k. \end{cases}$$

4.8. $-\frac{1+i}{3}$. **4.9.** a) 0; b) $-8\pi i$. **4.10.** $-\pi \operatorname{sh} 1$. **4.11.** 0. **4.12.** a) $\frac{3\pi i}{8}$; b) $-\frac{3\pi i}{8}$; c) 0. **4.13.** 0. **4.15.** ● Analícese la función $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$.

CAPITULO 12

SERIES Y SUS APLICACIONES

§ 1. Series numéricas

1. Convergncia de la serie. Criterio de Cauchy. La expresión

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1}$$

donde $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión numérica dada real o compleja, se llama *serie numérica*. Las sumas finitas

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1, \ S_2 = u_1 + u_2, \ \ldots, \\ S_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \ \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

se llaman *sumas parciales* de la serie (1).

Si existe el límite finito de la sucesión de las sumas parciales (2) $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, entonces la serie (1) se llama *convergente* y el número S, *suma de la serie* (1).

CRITERIO DE CAUCHY *Para que la serie numérica* (1) *sea convergente es necesario y suficiente que para todo* $\varepsilon > 0$ *exista* $N = N(\varepsilon)$ *tal, que para todos los* $n > N$ *y* $p = 1, 2, \ldots$ *se cumpla la desigualdad*

$$| S_{n+p} - S_n | = | u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} | < \varepsilon.$$

CRITERIO NECESARIO DE CONVERGENCIA. *Si la serie* (1) *converge, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

EJEMPLO 1. Muéstreso que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge y hállese su suma.

◀ Puesto que la fracción $\dfrac{1}{x(x+1)}$ es representable en forma de

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

entonces la suma parcial de la serie puede escribirse del modo siguiente

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n} + \frac{1}{n\,(n+1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

es decir, la serie dada converge y su suma es igual a 1. ▶

EJEMPLO 2. Investíguese la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ y si converge, hállese su suma.

◀ Tenemos

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}.$$

Si $q = 1$, entonces $S_n = n$, es decir, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ y por consiguiente, la serie diverge. Sea ahora $q \neq 1$, entonces

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Pongamos $q = re^{i\varphi}$, entonces $q^n = r^n e^{in\varphi}$. Para $0 < r < 1$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} r^n e^{in\varphi} = 0,$$

es decir, $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = 0$, de donde $\lim_{n\to\infty} S_n \frac{1}{1-q}$. Si $r > 1$, entonces $r^n \to \infty$, y por consiguiente, no existen el límite finito $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}$, ni el límite de la sucesión de sumas parciales. Por fin, para $r = 1$ y $\varphi \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ el límite

$$\lim_{n\to\infty} e^{in\varphi} = \lim_{n\to\infty} (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$$

(y por eso también el límite $\lim_{n\to\infty} S_n$) tampoco existe.

De este modo, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, llamada progresión geométrica infinita, converge para $|q| < 1$ y su suma es igual a $\frac{1}{1-q}$, y diverge para $|q| \geqslant 1$. ▶

EJEMPLO 3. Demuéstrese que la serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

diverge, a pesar de que sus términos tienden a cero cuando $n\to\infty$

◀ Analicemos la diferencia de las sumas parciales con números $2n$ y n. Tenemos

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Sustituyendo cada sumando por una magnitud menor $1/2n$ tenemos

$$S_{2n}-S_n>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Esta desigualdad significa que si $p=n$, para la serie armónica no se cumple el criterio de Cauchy y, por consiguiente, la serie diverge. ▶

Muéstrese que las series siguientes convergen y hállense sus sumas:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

1.3*. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{3^n}$. 1.4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}$.

Utilizando el criterio de Cauchy o el criterio necesario de convergencia de la serie, establézcase la divergencia de las series siguientes:

1.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. 1.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$.

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. 1.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^{10}}$.

1.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{n2^n}$. 1.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n}+in}$.

1.11. Demuéstrese que si los términos de la serie convergente se multiplican por un mismo número, entonces su convergencia no se perturbará.

1.12. Demuéstrese que si las series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergen y sus sumas son u y v, respectivamente, entonces también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, además su suma es igual a $u+v$. Póngase un ejemplo, cuando la afirmación recíproca no es válida.

1.13. Demuéstrese que la omisión de un número finito de los términos de la serie no influye sobre la convergencia de esta serie (¡pero influye sobre la suma!).

2. Convergencia absoluta y condicional. Criterios de convergencia absoluta. La serie (1) se llama *absolutamente convergente*, si converge la serie de módulos de los términos de esta serie, es decir, converge la serie

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \qquad (3)$$

Si la serie (1) converge y la serie (3) diverge, entonces la serie (1) se llama condicionalmente convergente.

CRITERIO DE COMPARACIÓN DE LAS SERIES *Si los términos de la serie* (1) *para todos* $n > N_0$ ($N_0 \geqslant 1$) *satisfacen la condición* $|u_n| \leqslant b_n$, *además la serie de signo positivo* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge, entonces la serie* (1) *absolutamente converge. Si para* $n > N_1$ *los términos de la serie* (1) *son reales y satisfacen la condición* $0 < c_n \leqslant |u_n|$, *además la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *diverge, entonces la serie* (1) *también diverge.*

EJEMPLO 4. Conociendo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, (véase el ejemplo 1) establézcase la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

◀ Ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, entonces, tomando en consideración la desigualdad

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

según el criterio de comparación nos cercioramos de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. ▶

En la práctica resulta más eficaz el siguiente

CRITERIO LÍMITE DE COMPARACIÓN. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *converge absolutamente y existe el límite finito* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_n}{v_n}\right| = q < +\infty$, *entonces la serie* (1) *también converge absolutamente. Si los términos de las series* u_n *y* v_n *son positivos y*

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < +\infty,$$

entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *bien ambas convergen, o bien ambas divergen.*

EJEMPLO 5. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n}. \tag{4}$$

◀ Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (véase el ejemplo 4) y ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n} : \frac{1}{n^2} = 3 \neq 0,$$

entonces la serie (4) también converge. ▶

EJEMPLO 6. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}. \tag{5}$$

◀ Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n} : \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$$

y la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (véase el ejemplo 3), entonces la serie (5) también diverge. ▶

CRITERIO DE D'ALEMBERT. *Si los términos de la serie* (1) *son tales, que existe el límite finito*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l,$$

entonces para $0\leqslant l<1$ *la serie* (1) *converge absolutamente, para* $l>1$ *diverge y para* $l=1$ *se requiere una investigación complementaria.*

EJEMPLO 7. Investíguese la convergencia de la serie ▶

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}. \tag{6}$$

◀ Tenemos $u_n=\dfrac{n^3}{2^n}$, $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$ y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\,2^n}{2^{n+1}n^3}=\frac{1}{2}<1.$$

Así pues, la serie (6) converge.

CRITERIO DE CAUCHY. *Sea* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}=l$. *En este caso, si* $0\leqslant l<1$, *entonces la serie* (1) *converge absolutamente; si* $l>1$, *la serie* (1) *diverge y para* $l=1$ *se requiere una investigación complementaria.*

EJEMPLO 8. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}.$$

◀ Tenemos $u_n=\left(\dfrac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$, por eso

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2<1.$$

Por consiguiente, la serie dada converge. ▶

Al aplicar el criterio de Cauchy suele ser útil la siguiente *fórmula de Stirling*:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}},\quad 0<\theta<1.$$

EJEMPLO 9. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}.$$

Tenemos

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n \sqrt{2\pi n}}{n^n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \right)^{1/n} =$$

$$= \frac{2}{e} \lim_{n\to\infty} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \cdot e^{\frac{0}{12n^2}} = \frac{2}{e} < 1,$$

es decir, la serie converge. ▶

CRITERIO INTEGRAL DE CAUCHY. *Sea la función $f(x)$ positiva y monótona para $x \geqslant 1$ y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la igualdad $f(n) = |u_n|$. Entonces la serie numérica* (3) *converge (es decir, la serie* (1) *converge absolutamente) o diverge simultáneamente con la integral impropia*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad a \geqslant 1.$$

EJEMPLO 10. Aclárese para qué valores del parámetro p converge la *serie de Dirichlet* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

▶ Puesto que la función $f(x) = \frac{1}{x^p}$ satisface las condiciones del criterio integral de Cauchy, entonces la investigación de la convergencia de la serie de Dirichlet se reduce a la investigación de la convergencia de la integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Pero $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{b\to+\infty} \ln b = +\infty & \text{para } p = 1, \\ \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{b^{1-p}}{1-p} - \dfrac{1}{1-p} = +\infty & \text{para } 0 < p < 1, \\ \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{(p-1)\,b^{p-1}} \right) = \dfrac{1}{p-1} & \text{para } p > 1. \end{cases}$$

De aquí deducimos que la serie de Dirichlet converge para $p > 1$ y diverge para $p \leqslant 1$ ▶

1.14. Demuéstrese que cualquier serie absolutamente convergente es una serie convergente.

1.15. Demuéstrese que se pueden agrupar los términos de la serie convergente sin alterar su orden, de un modo arbitrario.

1.16. Demuéstrese que se pueden reordenar de un modo arbitrario los términos de la serie absolutamente convergente; en este caso la suma de la serie no cambia.

Empleando el criterio de comparación o el criterio límite de comparación, investíguese la convergencia de las series siguientes:

1.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$. **1.18.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3-1}$. **1.20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

1.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$. **1.22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n^3+5n}$.

Aplicando el criterio de d'Alembert, investíguese la convergencia de las series siguientes:

1.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$. **1.24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

1.25. $\frac{3}{1} + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 4} + \ldots + \frac{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{1 \cdot 4 \ldots (3n-2)} + \ldots$

1.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!}$. **1.27.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} tn}{3^n}$.

Empleando el criterio de Cauchy, investíguese la convergencia de las series siguientes:

1.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$. **1.29.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.30. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, donde $u_{2k-1} = \left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$, $u_{2k} = \left(\frac{k}{3k-1}\right)^{k/2}$.

1.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2i}{(1+i)n+3}\right)^n$.

Empleando el criterio integral de Cauchy, investíguese la convergencia de las series siguientes:

1.32. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$. **1.33.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

1.34. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. **1.35.** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^2}$.

Investíguese la convergencia de las series:

1.36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$. **1.37.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

1.38. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. **1.39.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

1.40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n-1)^{n-1}}$. **1.41.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

1.42. $100 + \frac{100\cdot 103}{1\cdot 5} + \frac{100\cdot 103\cdot 106}{1\cdot 5\cdot 9} + \ldots$

$\ldots + \frac{100\cdot 103 \ldots (97+3n)}{1\cdot 5\cdot 9 \ldots (4n-3)} + \ldots$

1.43. $1 + \frac{1\cdot 11}{3!} + \frac{1\cdot 11\cdot 21}{5!} + \ldots + \frac{1\cdot 11\cdot 21 \ldots (10n-9)}{(2n-1)!} + \ldots$

1.44. $\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1\cdot 5\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \frac{1\cdot 5\cdot 9 \ldots (4n-3)}{(4n-2)!!} + \ldots$

1.45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. **1.46.** $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n^2}$.

1.47. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. **1.48.** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln\ln n}$.

1.49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$. **1.50*.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$.

1.51. $2+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\ldots+\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\ldots(4n-3)}+\ldots$

1.52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}$. 1.53. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1.54. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+3}\right)^n$. 1.55. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n$.

1.56. $\frac{1}{100}+\frac{1\cdot4}{100\cdot102}\frac{1\cdot4\cdot7}{100\cdot102\cdot104}+\ldots$

$\ldots+\frac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{100\cdot102\ldots(98+2n)}+\ldots$

1.57. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$. 1.58. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n})}$.

1.59. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$. 1.60. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(3n+1)(2\sqrt{n}-1)}$.

1.61. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+i}$. 1.62. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n n}{2^n}$.

1.63. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n\cdot n}{2^n}$. 1.64. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$.

1.65. Investíguese la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^\alpha}$ para diversos valores reales p y α.

1.66. Investíguese la convergencia de la serie $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^\alpha(\ln\ln n)^\beta}$ para distintos valores reales p, α y β.

1.67. Cerciórese de que el criterio de d'Alembert no es aplicable a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, donde $u_{2k-1}=\frac{2^{k-1}}{3^k}$, $u_{2k}=\frac{2^k}{3^k}$, mientras que el criterio de Cauchy muestra que esta serie converge.

3. **Criterios de convergencia condicional.** CRITERIO DE LEIBNIZ. *Sean reales y monótonamente decrecientes los términos a_n de la serie de signo alterno*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \tag{7}$$

es decir,

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots, \tag{8}$$

y sea

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{9}$$

Entonces la serie (7) converge, además para su suma S tenemos la estimación $S < a_1$.

EJEMPLO 11. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

◀ Ya que $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, quedan cumplidas las condiciones (8) y (9) y la serie dada converge. La serie de magnitudes absolutas de términos, es decir, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Por consiguiente, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge condicionalmente. ▶

CRITERIO DE ABEL — DIRICHLET. *Supongamos que los términos de la sucesión (b_n) decrecen monótonamente: $b_1 > b_2 > \ldots > b_n > \ldots$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, mientras que las sumas parciales $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, están acotadas en su conjunto, es decir,*

$$\left| \sum_{n=1}^{n} a_k \right| \leqslant M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

EJEMPLO 12. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

◀ Es obvio que en los puntos $x = m\pi$ todos los términos de la serie son nulos, es decir, para $x = m\pi$ la serie converge y su suma es

igual a cero. Supongamos ahora que $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Calculemos la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{sen} kx =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(k - \frac{1}{2}\right) x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x \right) =$$

$$= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} .$$

De aquí concluimos que para cualesquiera $n = 1, 2, \ldots$ y $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx \right| \leqslant \frac{2}{2 \left| \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right|} = \frac{1}{\left| \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right|} .$$

Después, la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ decrece monótonamente $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. Así pues, para $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ se cumplen las condiciones del criterio de Abel—Dirichlet y por eso la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$ converge. Por consiguiente, la serie converge para cualquier x. ▶

Investíguese la convergencia absoluta y condicional de las series siguientes:

1.68. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1}$. **1.69.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt{n}}$.

1.70. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n-2}$.

1.71. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n$.

1.72. $\frac{1}{3}-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 7}-\ldots$

$\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}+\ldots$

1.73. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

1.74. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}$.

1.75. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^3}$.

1.76. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.

1.77. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{(\ln 3)^n}$. 1.78*. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi n}{4}}{n}$.

1.79. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

Cerciórese de que no se puede aplicar el criterio de Leibniz a las series $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ con los términos ($k\in\mathbb{N}$) mencionados más abajo. Investíguese la convergencia de estas series utilizando otros procedimientos.

1.80*. $u_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}$, $u_{2k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}-1}$.

1.81. $u_{2k-1}=\frac{1}{3k+2}$, $u_{2k}=-\frac{1}{3k-1}$.

1.82. $u_{2k-1}=\frac{1}{3^k}$, $u_{2k}=-\frac{1}{2^k}$.

1.83. $u_{2k-1}=\frac{1}{2k-1}$, $u_{2k}=-\frac{1}{k^2}$.

1.84*. Demuéstrese que de la convergencia de las series

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ se deduce la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Se llama *producto, según Cauchy*, de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, cuyos términos se obtienen según las fórmulas

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Investíguese la convergencia del producto, según Cauchy, de las series siguientes:

1.85.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

1.86*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

1.87*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

1.88. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

1.89. Demuéstrese que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces el producto, según Cauchy, converge.

Sean $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión numérica arbitraria, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, las sumas parciales de la serie convergente $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ y $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, el resto de esta serie. Verifíquese

la validez de las relaciones (llamadas *transformaciones de Abel*):

1.90. $$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) S_k - v_1 S_0 + v_n S_n .$$

1.91. $$\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m+1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) (S_k - S_m) + v_n \times$$
$$\times (S_n - S_m).$$

1.92. $$\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m+2}^{n} (v_k - v_{k-1}) R_{k-1} +$$
$$+ v_{m+1} R_m - v_n R_n .$$

1.93. Demuéstrese que para el resto R_n de la serie de signo alterno (7) que satisface las condiciones del criterio de Leibniz es válida la desigualdad $|R_n| < a_{n+1}$.

§ 2. Series de funciones

1. Región de convergencia de la serie de funciones. Supongamos que las funciones $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, están definidas en la región D. La expresión

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

se llama *serie de funciones*. Si para $z_0 \in D$ la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ converge, entonces decimos que la serie de funciones (1) *converge en el punto* z_0. Si en cada punto $z \in D_1 \subset D$ las series numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ convergen, la serie (1) lleva el nombre de *convergente en la región* D_1.

CRITERIO DE CAUCHY. *Para que la serie de funciones* (1) *sea convergente en la región* D_1 *es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *y cualquier* $z \in D_1$ *exista* $N = N(\varepsilon, z)$ *tal, que*

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

para todos los $n > N(\varepsilon, z)$ *y* $p \in \mathbb{N}$.

Para definir la región de la convergencia absoluta de la serie de funciones (1) se debe emplear el criterio de d'Alembert o el criterio de Cauchy. Precisamente, si

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = l(z)$$

ó

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = l(z),$$

entonces para determinar la región de la convergencia absoluta de la serie (1) es necesario resolver la desigualdad funcional $l(z) < 1$ y para determinar la región de divergencia, la desigualdad funcional $l(z) > 1$. En este caso, para estudiar el comportamiento de la serie en los puntos de frontera de la región que se obtiene, es decir, en los puntos descritos por la ecuación $l(z) = 1$, se requiere una investigación complementaria.

EJEMPLO 1. Hállese la región de la convergencia para la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n3^n \sqrt{(x+2)^n}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x > -2.$$

◀ Puesto que $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n3^n \sqrt{(x+2)^n}}$ y $x > -2$, entonces, empleando el criterio de Cauchy, tenemos

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n3^n \sqrt{(x+2)^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3(x+2)^{1/2} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3\sqrt{x+2}}.$$

Por consiguiente, la serie converge si $\dfrac{1}{3\sqrt{x+2}} < 1$, es decir, para $x > -\dfrac{17}{9}$. Para $x = -\dfrac{17}{9}$ obtenemos la serie de signo alterno $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}$ que converge según el criterio de Leibniz. De este modo, la región de convergencia de la serie es un semiintervalo $[-17/9, +\infty)$. ▶

Hállense las regiones de convergencia de las series ($x \in \mathbb{R}$). Investíguense la convergencia absoluta de las series

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$. **2.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$.

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{x^n}$. **2.4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!(x+3)^n}$.

2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^x$. **2.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \dfrac{1}{n2^n x^n}\right)$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{e^{nx}}$. **2.8.** $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$. **2.10.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$.

EJEMPLO 2. Hállese la región de convergencia de la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-i)^n}$, $z \in \mathbb{C}$.

◀ Aplicando el criterio de d'Alembert podemos escribir la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(z-i)^n}{(z-i)^{n+1} n} \right| = \frac{1}{|z-i|} < 1,$$

de donde deducimos que la serie converge absolutamente fuera del círculo de radio 1 y con el centro en el punto i, es decir, para $|z-i| > 1$. Sobre la circunferencia $|z-i| = 1$ la serie, obviamente, diverge ▶

Hállense las regiones de convergencia absoluta de las series dadas más abajo ($z \in \mathbb{C}$):

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n}$. **2.12.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+1)^n}$.

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{(z-3i)^{2n}}$. **2.14.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, e^{-nz}$.

2.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nz^2}$. **2.16.** $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{nz}$.

2.17*. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-z}$. **2.18*.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$.

2.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-2}{1-2z}\right)^n$. **2.20*.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}$.

2. **Convergencia uniforme.** La serie de funciones convergente en la región D se llama *uniformemente convergente* en esta región, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal, que para el resto de la

serie (1)

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z),$$

cuando todos $n > N$ y $z \in D_1$, tiene lugar la estimación

$$|R_n(z)| < \varepsilon.$$

CRITERIO DE CAUCHY DE LA CONVERGENCIA UNIFORME. *Para que la serie de funciones* (1) *sea uniformemente convergente en la región* D_1, *es necesario y suficiente, que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *exista* $N = N(\varepsilon)$ *tal, que para todos los* $n > N(\varepsilon)$ *y* $z \in D_1$ *se cumplan las desigualdades* $|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$, $p = 1, 2, \ldots$.

EJEMPLO 3. Hállense la región de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z^n - z^{n+1}),$$

la suma de la serie y muéstrese que en toda la región de convergencia la serie converge no uniformemente.

◀ Puesto que las sumas parciales de la serie tienen la forma

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (z^k - z^{k+1}) = 1 - z^{n+1},$$

podemos concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)$ existe sólo para $|z| < 1$ y en el punto $z = 1$, es decir, la región de convergencia de la serie es la región

$$D_1 = \{z \mid |z| < 1 \quad \text{y} \quad z = 1\},$$

además la suma de la serie es igual a

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \begin{cases} 1 \text{ para } |z| < 1, \\ 0 \text{ para } z = 1. \end{cases}$$

El resto de la serie $R_n(z) = S(z) - S_n(z)$ tiene la forma

$$R_n(z) = \begin{cases} z^{n+1} & \text{para } |z| < 1, \\ 0 & \text{para } z = 1. \end{cases}$$

De aquí llegamos a la conclusión de que existen $\varepsilon_0 > 0$ y $N(\varepsilon_0)$ tales, que para cualquier $n > N(\varepsilon_0)$ haya z_n tal, que $|z_n| < 1$, pero $|R_n(z_n)| > \varepsilon_0$. Así, por ejemplo, tomando $\varepsilon_0 = 1/4$ y $z_n = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2}} e^{i\varphi_n}$ y eligiendo φ_n arbitrariamente, tenemos $|R_n(z_n)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$. Esto significa que en toda la región de convergencia D_1 no hay convergencia uniforme. Observemos, sin embargo, que en cualquier región $D_r = \{z \mid |z| \leqslant r < 1\}$ la serie convergirá uniformemente, ya que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $N = N(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln r}$ tal, que para todos los $z \in D_r$ y $n > N(\varepsilon)$ tenemos $|R_n(z)| = |z|^{n+1} \leqslant r^{n+1} < \varepsilon$. ▶

CRITERIO DE WEIERSTRASS. *Supongamos que la serie de funciones* (1) *converge en la región* D_1 *y que existe la serie numérica convergente de signo positivo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tal, que para todo* $z \in D_1$ *y para* $n > N_0$ *los términos de la serie* (1) *satisfacen la condición*

$$|f_n(z)| \leqslant a_n.$$

Entonces la serie (1) *converge absoluta y uniformemente en la región* D_1.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se llama *mayorante* para la serie (1).

EJEMPLO 4. Hállese la región de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ y muéstrese que en esta región la serie converge uniformemente.

◀ Apliquemos el criterio de d'Alembert. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1} n^2}{(n+1)^2 z^n} \right| = |z|.$$

Por consiguiente, en el círculo $|z| < 1$ la serie converge. En la frontera del círculo, es decir, para $|z| = 1$, obtenemos la serie convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

En este caso la serie inicial converge en el círculo cerrado $|z| \leqslant 1$. Pero como para todos los $|z| \leqslant 1$

$$|f_n(z)| = \frac{|z|^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

la serie converge absoluta y uniformemente. ▶

Hállense la región de convergencia y la región de convergencia uniforme de las series dadas ($x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$):

2.21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$. **2.22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}$.

2.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$. **2.24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

2.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$. **2.26.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{n^2}$.

2.27. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$. **2.28.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+2)^n}$.

2.29*. Demuéstrese que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, converge absolutamente en todos los puntos, pero no converge uniformemente en ningún intervalo, dentro o en la frontera del cual se encuentra el punto $x = 0$.

2.30. Demuéstrese, que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, converge absoluta y uniformemente en todo el eje numérico, mientras que la serie de magnitudes absolutas de los términos de la serie dada (la serie del problema 2.29) en todo el eje numérico converge no uniformemente.

2.31. Empleando el principio de máximo del módulo de la función analítica, demuéstrese que si los términos de la serie (1) son funciones analíticas en la región D y continuas en la región cerrada $\overline{D} = D + \Gamma$, y si la serie (1) converge uniformemente en Γ, entonces converge uniformemente en la región cerrada $\overline{D}$ (*segundo teorema de Weierstrass*).

2.32. Hállense la región de convergencia y la región de convergencia uniforme, así como la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n^n} - \frac{1}{1+z^{n+1}} \right).$$

3. Propiedades de las series convergentes uniformemente. Enunciemos varias propiedades en forma de problemas.

2.33. Demuéstrese que si los términos de la serie de funciones (1) convergente uniformemente en la región D_1 se multiplican por una misma función $\psi(z)$ acotada en la región D_1, entonces la convergencia uniforme de la serie no se altera.

2.34. Demuéstrese que si las funciones $f_n(z)$ son continuas en la región D_1 y la serie (1) converge uniformemente en esta región, su suma $f(z)$ es continua en la región D_1.

2.35. Demuéstrese que si las funciones $f_n(z)$ son continuas en la región D_1 y la serie (1) converge uniformemente en esta región, se puede integrar término a término a lo largo de cualquier curva l, situada enteramente en la región

D_1, es decir, tiene lugar la igualdad

$$\int_l \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta) \right) d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_l f_n(\eta)\, d\eta.$$

2.36*. Demuéstrese que si las funciones $f_n(x)$ son diferenciables en el segmento $[a, b]$, la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge y la serie de las derivadas $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente, entonces la serie inicial puede diferenciarse término a término, es decir, se cumple la igualdad

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Para las series convergentes uniformemente de las funciones analíticas se verifica el

TEOREMA DE WEIERSTRASS. *Si los términos de la serie de funciones* (1), *es decir, las funciones* $f_n(z)$, *son funciones analíticas en la región* D *y en cualquier subregión cerrada* $\overline{D}_1 \subset D$ *la serie* (1) *converge uniformemente, entonces*

a) *la suma de la serie* (1), *es decir, la función* $f(z)$, *es analítica en la región* D;

b) *la serie* (1) *puede diferenciarse término a término cualquier número de veces, es decir, son válidas las igualdades*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad k = 1, 2, \ldots, z \in D; \tag{2}$$

c) *en cualquier subregión cerrada* $\overline{D}_1 \subset D$ *las series* (2) *obtenidas como resultado de la diferenciación, convergen uniformemente.*

2.37. Empleando la afirmación de los problemas 2.34, 2.35 y el teorema de Morera (teorema inversa al teorema de Cauchy), demuéstrese la afirmación a) del teorema de Weierstrass.

2.38. Valiéndose de la fórmula de Cauchy para la derivada y de la afirmación del problema 2.35, demuéstrese la afirmación b) del teorema de Weierstrass.

§ 3. Series de potencias

1. Región de convergencia y propiedades de las series de potencias. La serie

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{1}$$

se llama *serie potencial* de potencias $(z-z_0)$. En particular, la serie

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n \tag{2}$$

es potencial de potencias de z. Sustituyendo $z-z_0=Z$ la serie (1) se reduce a la serie (2).

TEOREMA DE ABEL. *Si la serie de potencias* (2) *converge en el punto* $z=z_1\neq 0$, *converge absolutamente para todos los* z *tales, que* $|z|<|z_1|$, *además la convergencia será uniforme en cualquier círculo cerrado* $|z|\leqslant r<|z_1|$. *Si la serie* (2) *diverge en el punto* $z=z_2$, *también diverge para todos los* z *tales, que* $|z|>|z_2|$.

Del teorema de Abel se deduce que la región de convergencia de la serie potencial es un círculo con el centro en el origen de coordenadas (con el centro en el punto z_0), cuyo radio puede ser definido, aplicando bien sea el criterio de d'Alembert o el criterio de Cauchy, es decir, de las condiciones

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_nz^n}\right|=|z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|<1$$

o

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_nz^n|}=|z|\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}<1.$$

De aquí, para calcular el radio R del círculo de convergencia obtenemos la relación

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}\quad\text{o}\quad R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

EJEMPLO 1. Investíguese la convergencia de la serie

$$\frac{(z+2)^2}{1\cdot 3}+\frac{(z+2)^4}{4\cdot 3^2}+\ldots+\frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}.$$

◀ Apliquemos el criterio de d'Alembert:

$$u_n=\frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n},\quad u_{n+1}=\frac{(z+2)^{2(n+1)}}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+2)^{2(n+1)}\,n^2\cdot 3^n}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}\,(z+2)^{2n}}\right|=\frac{|z+2|^2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{|z+2|^2}{3},$$

De aquí llegamos a la conclusión de que la serie converge en el círculo $|z+2| \leqslant \sqrt{3}$. Luego, en la frontera del círculo, es decir, para $|z+2| = \sqrt{3}$ tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(z+2)^{2n}}{n^2 \cdot 3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

lo que significa que la serie converge absolutamente en el círculo cerrado $|z+2| \leqslant \sqrt{3}$, además, la convergencia en este círculo es uniforme. ▶

3.1. Enúnciese el teorema de Abel para la serie (1).

3.2*. Demuéstrese que la serie potencial (1) posee las propiedades siguientes:

a) en el círculo de convergencia $|z - z_0| < R$ la suma de la serie potencial $f(z)$ es una función analítica;

b) en el círculo de convergencia $|z - z_0| < R$ la serie potencial se puede diferenciar término a término cualquier número de veces, además, las series diferenciables tienen el mismo círculo de convergencia $|z - z_0| < R$;

c) la serie (1) puede ser integrada término a término sobre cualquier curva situada en el círculo de convergencia, con la particularidad de que la integral depende sólo de los extremos de la curva de integración y la serie, obtenida de la serie (1) como resultado de la integración desde z_0 hasta z, tiene el mismo círculo de convergencia $|z - z_0| < R$.

3.3*. Supongamos que la serie de potencias (1) converge en el círculo $|z - z_0| < R$, $R > 0$, y que $f(z)$ es la suma de esta serie. Muéstrese que los valores de las derivadas $f^{(n)}(z)$ en el punto z_0 pueden expresarse mediante los coeficientes de la serie (1) según las fórmulas

$$f^{(n)}(z_0) = n! c_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Hállense las regiones de convergencia absoluta y las regiones de convergencia uniforme de las series siguientes ($z \in \mathbb{C}$). Sustituyendo en estas series z por $x \in \mathbb{R}$, investíguese la convergencia absoluta y uniforme de ellas.

3.4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$. **3.5.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n \cdot 2^n \sqrt{2n+1}}$.

3.6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+2)^{2n}}{n}$.

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}(z-4)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (z-2)^{2n}}{n}$. 3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-3)^{2n}}{(2n+1)\,3^n}$.

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^n$. 3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n z^n}{3n-2}$.

3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\,z^n}{n!}$.

3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n+1} 2^n (z-1)^n$.

3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,(z-i)^n$.

3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^{2n+1}}{3^n (2n+1)}$. 3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^n}$.

3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3n+1)(z-1)^n$.

3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-3)^n}{(2n+1)4^n}$.

3.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{n!}$. 3.20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n 2^n \cdot \ln n}$.

3.21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{z^{3n-1}}{8^{n+1} n \ln^3 n}$. 3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{2n+1} (z-1)^n$.

3.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$. 3.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n (z-3)^{2n-1}}{n(n+1)}$.

3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{n\sqrt{n}}$. 3.26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(z-3)^{2n}}{n 2^n \ln^2 n}$.

3.27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n-1} (z+3)^n$.

3.28. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, z^{n!}$. 3.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (z-5)^n}{(3n+1)^{10}}$.

3.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n!\, 2^n}$. 3.31. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} z^{n^2}$.

3.32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^{n^n}}{n^n}$.

2. Desarrollo de las funciones en serie de Taylor. Tiene lugar el siguiente

TEOREMA DE TAYLOR. *La función $f(z)$ analítica en el círculo $|z-z_0| < R$ se representa unívocamente en este círculo por su serie de Taylor*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

cuyos coeficientes se determinan por las fórmulas [1])

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|\eta - z_0| = r \\ r < R}} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}\, d\eta,$$

$$n = 0, 1, \ldots$$

COROLARIO. Si la función $f(z)$ es analítica en la región D y $z_0 \in D$, entonces en el círculo $|z - z_0| < R(z_0, D)$, donde $R(z_0, D)$ es la distancia mínima del punto z_0 hasta la frontera de la región D o hasta el punto más próximo z', en que $f(z)$ no es analítica, $f(z)$ puede representarse en forma de una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0) (z-z_0)^n \qquad (3)$$

cuyos coeficientes se determinan según las fórmulas

$$c_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|\eta - z_0| = r \\ r < R(z_0, D)}} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}\, d\eta,$$

$$n = 0, 1, \ldots$$

---

[1]) Aquí y en adelante para anotar las integrales curvilíneas a lo largo de un contorno cerrado (integrales de contorno) empleamos el signo ordinario de la integral.

Si $z_0 = 0$, la serie de Taylor se llama también *serie de Maclaurin*.

EJEMPLO 2. Desarróllese la función $f(z) = \operatorname{sh} z$ en serie de potencias de z (es decir, en serie de Maclaurin).

◀ Ya que $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ es analítica en todo el plano, entonces según el teorema de Taylor su serie de Maclaurin convergirá a ella en todo el plano. Tenemos

$$(\operatorname{sh} z)^{(2n+1)} = \operatorname{ch} z, \quad n = 0, 1,$$

y

$$(\operatorname{sh} z)^{(2n)} = \operatorname{sh} z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por consiguiente, $c_{2n} = \dfrac{f^{2n}(0)}{(2n)!} = 0$ y $c_{2n+1} = \dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{(2n+1)!}$, y el desarrollo buscado tiene la forma

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}. \blacktriangleright$$

OBSERVACION. Si se examina la serie de Taylor de la función $f(x)$ de variable real, es decir, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

entonces, para que la igualdad (3) sea justa (cuando $z = x$ y $z_0 = x_0$) es necesario y suficiente que el término residual de la fórmula de Taylor $R_n(x)$ tienda hacia el cero para $n \to \infty$. El término residual puede ser anotado, por ejemplo, en la forma de Lagrange

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

$$\text{donde } 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

o en la forma de Cauchy

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

o en cualquier forma arbitraria.

EJEMPLO 3. Desarróllese la función e^x en serie de Taylor de potencias de x.

◀ La función $f(x) = e^x$ es infinitamente diferenciable y $(e^x)^{(n)} = e^x$. Por consiguiente, $f^{(n)}(0) = 1$. La fórmula de Taylor con el término residual en la forma de Lagrange tiene la forma

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

En cualquier segmento finito $x \in [-a, a]$, $a > 0$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\theta x} \leqslant e^a \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

y por eso para todo $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \blacktriangleright$$

Para resolver varios problemas se recomienda emplear los siguientes desarrollos de las funciones elementales:

a) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

b) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times$
$\times \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

c) $\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times$
$\times \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

d) $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \times$
$\times \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$.

e) $\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times$
$\times \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$.

f) $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots +$
$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots = 1 +$
$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$, $|z| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(en el caso cuando $\alpha = m \in \mathbb{N}$ la función $(1 + z)^m$ se desarrolla según el binomio de Newton en polinomio, además el desarrollo se realiza en todo el plano).

g) para $\alpha = -1$ de f) obtenemos una progresión geométrica infinita con denominador $-z$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots,$$

$$|z| < 1.$$

EJEMPLO 4. Desarróllese la función $\ln(2-5z)$ en serie de potencias de $(z+3)$.

◀ Transformemos el argumento de nuestra función formando la expresión $(z+3)$ con cierto coeficiente. Tenemos:

$$\ln(2-5z) = \ln(2-5(z+3)+15) = \ln 17\left(1 - \frac{5}{17}(z+3)\right) =$$

$$= \ln 17 + \ln\left(1 - \frac{5(z+3)}{17}\right).$$

Apliquemos el desarrollo d) para $\ln(1+u)$, poniendo $u = -\frac{5}{17}(z+3)$. Ya que el desarrollo d) se verifica para $|u| < 1$, entonces nuestro desarrollo se cumplirá para $\frac{5}{17}|z+3| < 1$. De este modo,

$$\ln(2-5z) = \ln 17 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(-\frac{5}{17}(z+3)\right)^n \frac{1}{n} =$$

$$= \ln 17 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{17}\right)^n \frac{(z+3)^n}{n}, \quad |z+3| < \frac{17}{5}.$$

Señalemos que en el eje real en el punto $x = 2{,}5$ la serie diverge (serie armónica) y en el punto $x = -32/5$, según el criterio de Leibniz, converge. Por consiguiente, $[-32/5, 2/5)$ es el intervalo de convergencia en el eje real. ▶

A menudo para desarrollar la función en serie es cómodo diferenciar o integrar los desarrollos conocidos y para desarrollar las fracciones racionales es conveniente desarrollarlas en fracciones simples.

EJEMPLO 5. Obténgase el desarrollo d) para la función $f(z) = \ln(1+z)$.

◀ Tenemos

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta},$$

donde el camino de integración no rodea el punto $z = -1$. Señalemos que la función $\frac{1}{1+\eta}$ para $|\eta| < 1$ es la suma de la progresión

geométrica con denominador $(-\eta)$, es decir,

$$\frac{1}{1+\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\eta)^n,$$

además, si $|\eta|\leqslant|z|<1$, la serie converge uniformemente y se puede integrar término a término. Por eso para z tales, que $|z|<1$, tenemos:

$$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{d\eta}{1+\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(-\eta)^n\,d\eta=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Desarróllese la función

$$f(z)=\frac{z^2-2z+19}{(z-3)^2(2z+5)}$$

en serie de potencias de z.

◀ Desarrollemos $f(z)$ en fracciones simples. Tenemos

$$f(z)=\frac{1}{2z+5}+\frac{2}{(z-3)^2}.$$

Según la fórmula de la suma de la progresión geométrica

$$\frac{1}{2z+5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{2z}{5}}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2z}{5}\right)^n,\quad |z|<\frac{5}{2},$$

y

$$\frac{2}{z-3}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n,\quad |z|<3.$$

Teniendo presente que

$$\left(\frac{2}{z-3}\right)'=-\frac{2}{(z-3)^2}$$

y considerando la afirmación b) del problema 3 2, obtenemos

$$\frac{2}{(z-3)^2}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{3^n}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{3^{n+1}},\quad |z|<3.$$

Sumando las series para $\frac{1}{2z+5}$ y $\frac{2}{(z-3)^2}$ tenemos

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}+\frac{2(n+1)}{3^{n+2}}\right)z^n, \quad |z|<\frac{5}{2}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 7. Desarróllese la función

$$f(x)=\int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$$

en serie de potencias de x ($x\in\mathbb{R}$).

◀ Conociendo el desarrollo de la función $\operatorname{sen} u=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\times$ $\times\frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}$ (véase el desarrollo c)), tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} u}{u}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^{2k}}{(2k+1)!}, \quad u\in\mathbb{R}$$

y por eso, utilizando la propiedad c) del problema 3.2, obtendremos

$$\int_0^x\frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^x\frac{u^{2k}}{(2k+1)!}\,du=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!\,(2k+1)}, \quad x\in\mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Recurriendo al teorema de Taylor (a la fórmula de Taylor con término residual en una forma cualquiera para la función de variable real) desarróllense en series de potencias de z las siguientes funciones, verificando de este modo la validez de las relaciones respectivas de a) — f):

3.33. e^z. **3.34.** $\cos z$. **3.35.** $\operatorname{sen} z$. **3.36.** $(1+z)^\alpha$.

3.37. 2^z. **3.38.** $\operatorname{sen}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$. **3.39.** $\cos^2 z$.

Escríbanse los primeros tres términos no nulos del desarrollo en serie de potencias de z de las siguientes funciones:

3.40*. $\operatorname{tg} z$. **3.41.** $\frac{1}{\cos z}$. **3.42.** $\operatorname{th} z$. **3.43.** $e^z\cos z$.

Empleando los desarrollos de las principales funciones elementales a) — g), así como la posibilidad de diferenciar e integrar término a término las series potenciales, desarróllense las funciones en series de potencias de z o indíquense las regiones de convergencia de las series obtenidas [1]):

3.44. e^{-z^2}. **3.45.** $\operatorname{tg}^2 z$. **3.46.** $\frac{z}{4+z^2}$.

3.47. $\frac{z}{3+4z}$. **3.48.** $\sqrt[3]{27-z}$. **3.49.** $\frac{1}{\sqrt{9+z^2}}$.

3.50*. $\frac{3z+1}{(z-2)^2}$. **3.51.** $\frac{3}{1+z-2z^2}$.

3.52. $(1-z)\,e^{-2z}$. **3.53.** $\operatorname{ch} z$.
3.54. $\operatorname{sen} 2z + 2z\cos 2z$. **3.55.** $\operatorname{sen} 2z \cos 2z$.
3.56. $\ln(1 + z - 2z^2)$. **3.57.** $\ln(z^2 + 3z + 2)$.
3.58. $\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$. **3.59.** $\operatorname{arctg} z$.

3.60. $\operatorname{arcsen} z$. **3.61.** $\int\limits_0^z e^{-\eta^2/2}\,d\eta$.

3.62. $\int\limits_0^z \frac{\operatorname{sen}\eta^2}{\eta}\,d\eta$. **3.63*.** $\frac{z\cos z - \operatorname{sen} z}{z^2}$.

3.64*. $\frac{z\operatorname{sen} z - 1 + \cos z}{z^2}$.

Desarróllense las funciones en series de potencias de $(z - z_0)$ y determínense las regiones de convergencia de las series obtenidas:

3.65. $z^3 - 2z^2 - 5z - 2$, $z_0 = -4$.

3.66. $\frac{1}{1-z}$, $z_0 = 2$. **3.67.** $\frac{1}{1-z}$, $z_0 = 3i$.

3.68. $\frac{1}{z^2-6z+5}$, $z_0 = 3$. **3.69.** $\frac{1}{z^2+3z+2}$, $z_0 = -4$.

3.70. $\sqrt[3]{z}$, $z_0 = 1$ **3.71*.** $\frac{1}{z^2}$, $z_0 = 2$.

3.72. e^{z^2-4z+1}, $z_0 = 2$. **3.73.** $e^{z^2-z^2}$, $z_0 = 1$.
3.74. $\operatorname{sen}(z^2 + 4z)$, $z_0 = -2$.
3.75*. $\ln(5z + 3)$, $z_0 = 1$.
3.76. $\ln(z^2 + 6z + 12)$, $z_0 = -3$.

---

[1]) Véanse también los problemas 4.31.—4.36

Hállense las regiones de convergencia de las series indicadas y sus sumas:

3.77. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) z^n$.

3.78. $\sum_{n=1}^{\infty} n (z+1)^n$. **3.79.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n+1}$.

3.80. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{-2n-2} z^{2n}$, $a \neq 0$.

3.81. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n}$.

3. Teorema de unicidad. Prolongación analítica. Enunciemos *el teorema de unicidad*:

Si las funciones $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en la región D y en el conjunto de distintos puntos $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que tiene el punto límite $a \in D$, se cumplen las igualdades $f(z_n) = g(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$f(z) = g(z)$ en todos los puntos de D.

Supongamos que la función $f(z)$ es analítica en la región D y la función $g(z)$ es analítica en la región D_1 tal, que la intersección $D \cap D_1 = D_2$ contiene una sucesión de distintos puntos $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que tiene por lo menos un punto límite $a \in D_2$. Sea, además, $f(z) = g(z)$ para $z \in D_2$. Entonces la función

$$F(z) = \begin{cases} f(z) \text{ para } z \in D, \\ g(z) \text{ para } z \in D_1 \setminus D_2 \end{cases}$$

se llama *prolongación analítica* de la función $f(z)$ de la región D a la región $D_1 \setminus D_2$.

EJEMPLO 8. Demuéstrese que si la función $f(z)$ es continua en la región D que contiene el punto $z = 0$, y si $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$ para $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$, entonces $f(z)$ no es analítica en la región D ($n_0 \geqslant 1$ es entero).

◀ Puesto que $f(z)$ es continua en D, es también continua en el segmento del eje real, mientras que en los puntos vecinos $x = \frac{1}{n}$ y $x = \frac{1}{n+1}$, $n > n_0$, ella toma los valores de los signos opuestos. Por eso existen los puntos $x_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ en los cuales $f(x_n) = 0$ y, además, $x_n \to 0$. Por consiguiente, en los puntos $x_n \in D$ la función $f(z)$ coincide con la función analítica $g(z) \equiv 0$; ya que $f(z) \not\equiv 0$, $f(z)$ no puede ser una función analítica. ▶

EJEMPLO 9. Demuéstrese que la función

$$g(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} + \ldots + \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} + \ldots$$

es prolongación analítica de la función

$$f(z) = 1 + 2z + 2^2z^2 + \ldots + 2^nz^n + \ldots$$

◀ Determinemos la región de convergencia de las series para $g(z)$ y $f(z)$. Tenemos:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{|1-z|^{n+1}}} = \left|\frac{z}{1-z}\right| < 1$$

y

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|2^nz^n|} = 2|z| < 1,$$

es decir, la serie para $g(z)$ converge en la región $D_1 = \{z \mid \operatorname{Re} z < 1/2\}$ (véase el problema (2.20)), mientras que la serie para $f(z)$ converge en la región $D_2 = \{z \mid |z| < 1/2\}$.

Determinemos las sumas de estas series en las regiones indicadas:

$$g(z)\frac{z}{1-z}\left(1 + \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{(1-z)^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{1-z}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-z}} = \frac{1}{1-2z}$$

y

$$f(z) = \frac{1}{1-2z}.$$

Ya que $D_2 \subset D_1$ y en la región D_2 se verifica la identidad $f(z) = g(z)$, la función $g(z)$ es una prolongación analítica de la función $f(z)$ de la región D_2 a la región D_1. ▶

3.82. Demuéstrese que para todo $a \neq 0$ y $|a| \neq 1$ la ecuación funcional $f(z) = f(az)$ no tiene solución, que sea analítica en el punto $z = 0$ y su entorno, y distinta de $f(z) \equiv \text{const}$.

3.83*. Demuéstrese el teorema de unicidad en el caso cuando $\forall\, z \in D$ $(g(z) \not\equiv 0)$, es decir, demuéstrese el teorema siguiente: si la función $f(z)$ analítica en la región D se reduce a cero en los puntos $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ situados en la región D y tales, que $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = a \in D$, entonces $\forall\, z \in D$ $(f(z) = 0)$.

3.84. ¿Será analítica la función $f(z)$ en el punto $z = 0$ y su entorno, si para todos los $n > n_0$ enteros satisface la relación $f\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}$?

3.85. Hállense las funciones analíticas $f(z)$ en el entorno del punto $z = 0$, que satisfacen las condiciones:

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.86. Muéstrese que la función

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

es prolongación analítica de la función

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Hállese la expresión analítica de estas funciones en la parte común de las regiones de convergencia de las series.

3.87. Muéstrese que la función

$$g(z) = \ln(2+2i) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1-2i)^n}{n(2+2i)^n}$$

es prolongación analítica de la función

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}.$$

Hállese la expresión analítica de estas funciones en la parte común de las regiones de convergencia de las series.

§ 4. Aplicación de las series de potencias

1. Cálculo de los valores de las funciones. Los desarrollos a) g) del § 3 permiten obtener los valores de las funciones correspondientes en los puntos dados con cualquier exactitud.

EJEMPLO 1. Hállese el número e con exactitud hasta 0,00001.

◀ Sustituyendo $x = 1$ en el desarrollo da la función e^x tenemos

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Estimemos el resto

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\dots k} <$$

$$< \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\, n}.$$

Por consiguiente, la igualdad $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ tiene un error absoluto límite igual a $\frac{1}{n!\, n}$. Hallemos n para el cual $\frac{1}{n!\, n} < 0{,}00001$ ó $n!\, n \geqslant 100\,000$. Obtenemos $n \geqslant 8$. Calculando $2 + \sum_{k=2}^{8} \frac{1}{k!}$ y redondeando, hallamos la respuesta con la exactitud requerida de $e \approx 2{,}71828$. ▶

4.1. Determínese el número de términos que hay que tomar en el desarrollo de la función $\ln(1 + x)$, para calcular $\ln 2$ con exactitud de hasta 0,0001.

4.2. Determínese el número de términos de la serie que hay que tomar en el desarrollo de la función $\cos x$, para calcular el $\cos 10°$ con exactitud hasta 0,0001.

4.3. ¿Con qué error absoluto límite se puede calcular

$$\sqrt[5]{36}\,(32 + 4)^{1/5} = 2\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{1/5}$$

tomando tres términos de la serie binomial?

4.4. ¿Para qué x el polinomio $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ da el valor de la función $\operatorname{sen} x$ con exactitud hasta 0,0001?

4.5. ¿Cuál es el error absoluto límite de la igualdad

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3}$$

al calcular la $\sqrt{5}$?

Empleando los desarrollos correspondientes, calcúlense los valores indicados de la función con exactitud hasta 0,0001:

4.6. $\sqrt{e}$ **4.7.** $\frac{1}{e}$. **4.8.** $\operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$.

4.9. sen 12°. 4.10. cos 1. 4.11*. sen 1000.

4.12*. $\sqrt[3]{520}$. 4.13*. $\sqrt{15}$. 4.14*. $\sqrt[4]{700}$.

4.15*. ln 2. 4.16. arctg $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4.17. $I_0(0{,}5)$, donde $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$.

4.18. sh 1. 4.19. ch 1.

En los problemas 4.20—4.29, empleando los desarrollos en series potenciales, se requiere formar en Fortran los subprogramas-funciones para calcular los valores de las funciones indicadas, con el error absoluto límite dado. Utilícense los parámetros X, EPS, donde X es el argumento y EPS es el error absoluto límite. Se debe escoger los nombres de los subprogramas que no coinciden con los nombres de los subprogramas funciones estándares correspondientes.

4.20*. $y = \text{sen } x$. 4.21. $y = \cos x$.
4.22*. $y = e^x$. 4.23*. $y = (1 + x)^\alpha$,
4.24. $y = \ln(1 + x)$. 4.25*. $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$,

4.26. $y = \text{arctg } x$.
4.27. $y = I_0(x)$ (véase el problema 4.17).
4.28. $y = \text{sh } x$. 4.29. $y = \text{ch } x$.

4.30. Compóngase en Fortran el programa de la resolución de uno de los problemas 4.6—4.19, aplicando los subprogramas-funciones recibidos al resolver los problemas 4.20—4.29. En el programa es necesario prever la comparación de los resultados calculados por medio de la composición de un subprograma-función y empleando el subprograma-función estándar que entra en la biblioteca de los subprogramas obligatorios.

2. Integración de funciones. Desarrollando la función subintegral $f(t)$ en serie potencial, se puede, aplicando el teorema de la integración de las series potenciales, representar la integral $\int_0^x f(t)\,dt$ en forma de serie potencial y calcular el valor de esta integral con exactitud prefijada para cualquier valor de x, a partir de la integral de convergencia de la serie obtenida

EJEMPLO 2. Desarróllese la función $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ en serie potencial de potencias de x.

◀ Empleando el desarrollo $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ obtenemos

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}$$

en todo el eje numérico. Haciendo uso de la integración término a término, hallamos

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!}. \blacktriangleright$$

Desarróllense las funciones dadas en series de potencias de x:

4.31. $\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt$. **4.32.** $\frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\,dt$.

4.33. $\int_0^x \cos t^2\,dt$. **4.34.** $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

4.35. $\int_0^x J_0(t)\,t\,dt$ (véase el problema 4.17).

4.36. $\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$.

Calcúlense las integrales con exactitud hasta 0,0001:

4.37. $\int_0^{0,3} \frac{\ln(1+t)}{d}\,dt$. **4.38.** $\int_0^{0,2} \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$.

4.39. $\int_0^{0,5} e^{-t^2}\,dt$. **4.40.** $\int_0^{0,6} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

4.41. $\int_0^{0,8} \frac{dx}{1-x^3}$. **4.42.** $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

En los problemas 4.43—4.47, empleando los desarrollos en series potenciales, fórmese en Fortran el subprograma-función para calcular las integrales dadas con el error absoluto límite prefijado. Los parámetros son X y EPS, donde X es el límite superior de integración y EPS es el error absoluto límite.

4.43. Si $(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$. **4.44.** erf $x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

4.45. $\int_0^x (1+t^s)^\alpha\, dt \quad (s>0,\ \alpha \neq 0)$.

4.46. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\, dt$. **4.47.** $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt$.

4.48. Empleando los subprogramas-funciones obtenidas, resolviendo los problemas 4.43—4.47, fórmese en Fortran el programa de resolución de uno de los problemas 4.37—4.42.

3. Obtención de las sumas de series numéricas. Aceleración de la convergencia. Determinando la suma de una serie numérica se calcula su suma parcial, para la cual la magnitud del resto de la serie no sobrepasa el error absoluto prefijado. Aplicando los desarrollos en series potenciales conocidos, se puede expresar, en algunos casos, la suma de la serie numérica en forma del valor de la función en un punto determinado.

Demuéstrense las igualdades indicadas:

4.49. $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+n}$.

4.50*. $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)} = \frac{1}{2(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$.

4.51*. $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)\ldots(\alpha+k+p)} =$

$$= \frac{1}{p(\alpha+n)\ldots(\alpha+n+p-1)} \quad (p \in \mathbb{N}).$$

4.52*. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$.

4.53*. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Hállense las sumas de las series sin calcular las sumas parciales:

4.54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$. **4.55.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2}$.

4.56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

4.57. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}$. **4.58.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$.

4.59. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n \cdot (2n)!}$. **4.60.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Cuando se determina la suma de una serie numérica se requiere tomar un número grande de términos, si el resto de esta serie tiende lentamente a cero. Esta serie debe ser transformada en serie, cuyo resto tiende a cero más rápidamente. Esta transformación se llama *aceleración de convergencia* de la serie. Uno de los métodos de aceleración de convergencia es *el método de Kummer*. La suma desconocida A de la serie convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

se calcula según la fórmula

$$A = qB + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - qb_k), \tag{2}$$

donde B es la suma conocida de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tal, que existe el límite

$$q = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} \neq 0.$$

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - qb_k) \tag{3}$$

converge más rápidamente, que la serie inicial (1), es decir, el resto de la serie (3) es un infinitésimo de orden más elevado, que el resto de la serie (1).

EJEMPLO 3. Hállese la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ con exactitud hasta 0,001.

◀ Aclaremos cuántos términos de la serie dada hay que tomar para alcanzar la exactitud requerida. Estimando el resto (véase el problema 4.49) obtenemos

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} < 0{,}001,$$

de donde se deduce que $n > 1000$, es decir, para obtener la exactitud indicada se requiere tomar 1001 términos de la serie inicial.

Mejoremos la convergencia de la serie. Poniendo en la fórmula (2)

$$a_k = \frac{1}{k^2},\ b_k = \frac{1}{k(k+1)},\ q = 1,\ a_k - qb_k = \frac{1}{k^2(k+1)},$$

hallamos (véase el problema 4.49 para $\alpha = 0$ y $n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}. \qquad (4)$$

Apliquemos la fórmula (2) para transformar la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \times$ $\times \frac{1}{k^2(k+1)}$, poniendo ahora $a_k = \frac{1}{k^2(k+1)}$, $b_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, $q = 1$ y $a_k - qb_k = \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$. Entonces, considerando (4), tenemos (véase el problema 4.50 para $\alpha = 0$ y $n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}.$$

El cálculo de la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ se redujo al cálculo de

la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}.$$

Estimando el resto

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k(k+1)(k+2)} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3n(n+1)(n+2)},$$

obtenemos $\frac{1}{3n^3} < 0{,}001 \cdot 2$, de donde $n^3 > \frac{1}{3} \cdot 2000 \approx 666{,}7$ ó $n \geqslant 9$, es decir, la exactitud requerida se obtiene para $n = 9$. Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + 2 \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)} = 1 + 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}1975 = 1{,}645.$$

Aplicando una vez más la transformación a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \times$ $\times \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$ se podría mejorar más la convergencia. ▶

En los problemas 4.61—4.65, aplicando la transformación de Kummer, hállense las sumas de las series indicadas con exactitud hasta 0,0001, tomando con este fin no más de 10 términos de la serie obtenida. Utilícense las relaciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \zeta(p) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) \zeta(p) \quad (p > 1).$$

Los valores de la función zeta $\zeta(p)$ se toman de la tabla

p	ζp
2	1,6449340668
3	1,2020569032
4	1,0823232337
5	1,0369277551
6	1,0173430620
7	1,0083492774
8	1,0040773562

4.61*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$. **4.62*.** $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}$.

4.63*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2}$. **4.64*.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(5n+3)}$.

4.65*. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+2}$.

4.66. Fórmese en Fortran el programa para resolver uno de los problemas 4.61—4.65.

4. Integración de las ecuaciones diferenciales aplicando las series. Las series potenciales se emplean ampliamente en la resolución de ecuaciones diferenciales. Para una serie de ecuaciones diferenciales se ha mostrado, que la solución $y(x)$ es representable en forma de la serie potencial

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k, \qquad (5)$$

cuyos coeficientes se pueden determinar de distintos modos, teniendo en cuenta la igualdad dada.

a) Sea que se requiere hallar la solución de la ecuación $y'' = f(x, y, y')$, que satisfaga las condiciones $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, además, la función $f(x, y, y')$ en el punto (x_0, y_0, y_1) tiene derivadas parciales de cualquier orden. En este caso los coeficientes $y^{(k)}(x_0)$ de la serie (5) se determinan diferenciando sucesivamente la ecuación inicial y sustituyendo en ella x_0 y los valores ya hallados de $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, . . .

EJEMPLO 5. Hállese la solución de la ecuación $y'' = x^2 y$, que satisface las condiciones $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

◀ Tenemos $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ y a partir de la ecuación dada hallamos $y''(0) = 0$. Luego, diferenciando la ecuación, tenemos

$$y''' = x^2y' + 2xy,$$

$$y^{IV} = x^2y'' + 4xy' + 2y,$$

$$y^V = x^2y''' + 6xy'' + 6y',$$

. . . . . .

$$y^{(k+2)} = x^2y^{(k)} + 2kxy^{(k-1)} + k(k-1)y^{(k-2)},$$

. . . . . .

y para $x = 0$ recibimos de aquí

$$y^{(k+2)}(0) = k(k-1)y^{(k-2)}(0), \quad k = 2, 3, \ldots$$

Puesto que $y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, entonces

$$y^{(4n)}(0) = y^{(4n+2)}(0) = y^{(4n+3)}(0) = 0$$

e

$$y^{(4n+5)}(0) = (4n+2)(4n+3)y^{(4n+1)}(0) =$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \ldots (4n+2)(4n+3), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por consiguiente,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \ldots (4n+2)(4n+3)}{(4n+1)!} x^{4n+1}.$$

Según el criterio de d'Alembert la serie obtenida converge para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, la función $y(x)$ definida por esta serie es la solución de la ecuación dada para cualquier x. ▶

Hállense las soluciones de las ecuaciones que satisfacen las condiciones dadas:

4.67. $y'' = x^2y$, $y(0) = y'(0) = 1$.

4.68. $y'' = -x^2y' - 2xy + 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Hállense los cinco primeros términos del desarrollo de la solución de la ecuación diferencial en serie potencial:

4.69. $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$.

4.70. $y'' = -2xy$, $y(0) = y'(0) = 1$.

4.71. $y'' = y\cos x + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

b) Si la ecuación diferencial inicial es lineal respecto a la función buscada y sus derivadas, además el coeficiente de la derivada de alto orden en el punto x_0 es diferente de cero, entonces es necesario buscar la solución en forma de la serie (5) con coeficientes indeterminados a_k, $k = 0, 1, \ldots$ El carácter ligítimo de este método se deduce de la afirmación que se demuestra en la teoría analítica de ecuaciones diferenciales, que citamos para la ecuación de segundo orden.

TEOREMA 1. *Si en la ecuación diferencial*

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = f(x) \qquad (6)$$

las funciones $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ *y* $f(x)$ *son analíticas en el entorno del punto* x_0 *y* $p_0(x_0) \neq 0$, *existe una solución de la ecuación* (6), *que es representable en la forma de la serie potencial* $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

EJEMPLO 6. Hállese la solución (en la forma de la serie potencial) de la ecuación

$$y'' - xy' + y = 1,$$

que satisface las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$.

◀ Buscamos la solución en forma de la serie $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, en la cual, en virtud de las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$, tenemos $a_0 = a_1 = 0$. Por consiguiente, $y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación, obtenemos

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 1.$$

De aquí hallamos que $2 \cdot 1 \cdot a_2 = 1$, es decir, $a_2 = \dfrac{1}{1 \cdot 2}$, y

$$(k+1)(k+2)\,a_{k+2} = (k-1)\,a_k \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Ya que $a_1 = 0$, entonces $a_{2m+1} = 0$ para todos los $m = 0, 1, \ldots$ y para $k = 2m$, $m = 1, 2, \ldots$, obtenemos la fórmula recurrente

$$a_{2(m+1)} = \frac{(2m-1)\,a_{2m}}{(2m+1)(2m+2)}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

de la cual deducimos las igualdades

$$a_{2(m+1)} = \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}.$$

Por consiguiente, la solución buscada tiene la forma

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}\,x^{2m+2},$$

con la particularidad de que la serie obtenida converge para cualquier $x \in \mathbb{R}$. ▶

Empleando las series potenciales, intégrese las siguientes ecuaciones diferenciales:

4.72. $y'' + xy' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

4.73. $y'' - xy' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

4.74. $y'' - xy' + y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

c) Si el coeficiente de la derivada mayor en la ecuación lineal en el punto x_0 se reduce a cero, es necesario aplicar el siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Si en la ecuación diferencial*

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0 \qquad (7)$$

las funciones $p_0(x)$, $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son analíticas en el entorno del punto x_0, además el punto x_0 es cero de orden s de la función $p_0(x)$, cero de orden no inferior a $s-1$ de la función $p_1(x)$ y cero de orden no inferior a $s-2$ de la función $p_2(x)$, entonces la solución de la ecuación (7) en el entorno del punto x_0 existe y puede representarse en la forma de la serie potencial generalizada

$$y(x) = (x-x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

donde $a_0 \neq 0$ y $r \in \mathbb{R}$.

EJEMPLO 7. Hállese la solución (en la forma de la serie potencial generalizada) de la ecuación

$$xy'' + y' + xy = 0,$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

◀ Los coeficientes de la ecuación satisfacen las condiciones del teorema 2, por eso buscamos la solución en forma de serie potencial generalizada

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}, \quad a_0 \neq 0.$$

Tenemos

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r) a_k x^{k+r-1},$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)\, a_k x^{k+r-2}$$

Sustituyendo estas series en la ecuación tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)\, a_k x^{k+r-1} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)\, a_k x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+1} = 0,$$

es decir,

$$r^2 a_0 x^{r-1} + (r+1)^2 a_1 x^r + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+r)^2 a_k + a_{k-2})\, x^{k+r-1} = 0.$$

De aquí siguen las igualdades

$$r^2 a_0 = 0, \quad (r+1)^2 a_1 = 0, \quad (k+r)^2 a_k + a_{k-2} = 0.$$

Según la condición $a_0 \neq 0$. Por consiguiente, $r = 0$ y entonces

$$a_1 = 0 \quad \text{y} \quad k^2 a_k = -a_{k-2}, \quad k = 3, 4, \ldots$$

A partir de estas igualdades concluimos que $a_{2m+1} = 0$ para todo $m = 0, 1, \ldots$ Teniendo presente la condición inicial $y(0) = 1$ hacemos la conclusión de que $a_0 = 1$ y tenemos la fórmula recurrente

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m)^2}$$

de la cual obtenemos

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{((2m)!!)^2} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m}(m!)^2}.$$

Por lo tanto, la solución buscada se escribe en la forma de

$$y(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2^{2m}(m!)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Hállese la solución general de la ecuación diferencial en forma de la serie potencial generalizada:

4.75*. $xy'' + 2y' + xy = 0$. **4.76.** $4xy'' + 2y' + y = 0$.

5. Ecuación y funciones de Bessel. El caso particular de la ecuación (6), cuyos coeficientes satisfacen las condiciones del teorema 2, es la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{8}$$

Sus soluciones son las funciones cilíndricas de Bessel de primer orden

$$I_\nu(x) = a_0^{(\nu)} x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)} \tag{9}$$

y para los ν no enteros

$$I_{-\nu}(x) = a_0^{(\nu)} x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!(1-\nu)(2-\nu)\ldots(k-\nu)}. \tag{10}$$

Si ν es un número entero, $\nu = n$, entonces la segunda solución particular de la ecuación de Bessel (8) es la función de Neumann (o de Weber), que se determina de la relación

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{I_\nu(x)\cos \nu\pi - I_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi}$$

y que es la función cilíndrica de segundo género de orden n. En las fórmulas (9) y (10) suele tomarse la siguiente constante $a_0^{(\nu)}$:

$$a_0^{(\nu)} = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \tag{11}$$

donde $\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-1}\, dx$ es la función gamma de Euler.

4.77. Empleando la representación (9) para $J_\nu(x)$ demuéstrense las relaciones siguientes:

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x), \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \tag{13}$$

4.78. Partiendo de las relaciones (12) y (13) dedúzcanse las relaciones

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x),$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x).$$

4.79*. Empleando la representación (9) y el valor $a_0^{(\nu)}$ de (11), exprésense $J_{-1/2}(x)$ e $J_{1/2}(x)$ mediante las funciones elementales.

4.80. Demuéstrese que si $J_\nu(s)$ es la solución de la ecuación (8), entonces $J_\nu(\alpha x)$ es la solución de la ecuación

$$x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - \nu^2)\, y = 0. \tag{14}$$

Escríbase la solución general de la ecuación (14).

Utilizando el resultado del problema 4.80, hállese la solución general de la ecuación:

4.81. $xy'' + y' + 4xy = 0$.

4.82. $9x^2y'' + 9xy' + (36x^2 - 1)\, y = 0$.

4.83. $x^2y'' + xy' + (3x^2 - 4)\, y = 0$.

4.84. $x^2y'' + xy' + \left(9x^2 - \frac{1}{25}\right) y = 0$.

§ 5. Series de Laurent

1. **Series de Laurent. Teorema de Laurent.** Se llama *serie de Laurent* la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n, \tag{1}$$

además, la serie

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\,(z-z_0)^n$$

se denomina *parte principal* de la serie de Laurent y la serie

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

parte regular. Si

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}=r<R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

la región de convergencia de la serie (1) es un anillo $K=\{z \mid 0 \leqslant r < |z-z_0| < R\}$. En este anillo K, la suma de la serie $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ es una función analítica, además los coeficientes de la serie c_n están relacionados con la función $f(z)$ mediante las fórmulas

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta-z_0|=r'} \frac{f(\eta)}{(\eta-z)^{n+1}}\,d\eta, \quad n=0, \pm 1, \ldots, \tag{2}$$

donde $r < r' < R$.

EJEMPLO 1. Hállense la región de convergencia y la suma de la serie de Laurent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}.$$

◀ Aplicando el criterio de Cauchy a cada uno de estos sumandos tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n |z-1|^{n+1}}}=\frac{1}{2|z-1|}<1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n|z-1|^{n-1}}{3^n}}=\frac{|z-1|}{3}<1.$$

De aquí concluimos que la región de convergencia de la serie inicial es un anillo

$$K=\left\{z \,\middle|\, \frac{1}{2}<|z-1|<3\right\}.$$

Observando que los sumandos son derivadas de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^n (z-1)^n} \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n},$$

podemos escribir que en el anillo K

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (z-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (z-1)^{n-1}}{3^n} =$$

$$= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n (z-1)^n} \right)' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n} \right)' =$$

$$= -\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2(z-1)}} \right) + \left(\frac{1}{1 - \frac{z-1}{3}} \right)' =$$

$$= -2 \left(\frac{z-1}{2z-3} \right)' + \left(\frac{3}{4-z} \right)' = \frac{3}{(4-z)^2} + \frac{2}{(2z-3)^2}.$$

De este modo, la suma de la serie dada es la función

$$f(z) = \frac{3}{(4-z)^2} + \frac{2}{(2z-3)^2}, \quad \frac{1}{2} < |z-1| < 3. \blacktriangleright$$

TEOREMA DE LAURENT. *Si la función $f(z)$ es analítica en el anillo $0 \leqslant r < |z - z_0| < R$, entonces en este anillo es representable de modo único en la forma de serie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

cuyos coeficientes se calculan según las fórmulas (2)

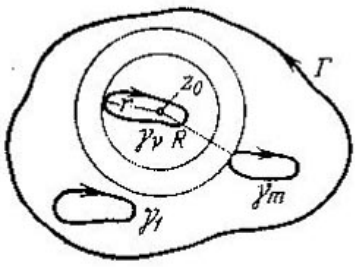


Fig. 101

COROLARIO. Sea $f(z)$ analítica en la región multiplemente conexa D, limitada por el contorno Γ y los contornos interiores $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ (fig. 101) Si el punto z_0 está situado en el interior (o en la frontera) de uno de los contornos interiores γ_ν y la magnitud $r = \max_{\eta \in \gamma_\nu} |z_0 - \eta|$ es menor que la distancia R de z_0 hasta la parte restante de la frontera de la región D o hasta el punto en el cual $f(z)$ no es analítica, es decir,

$$0 \leqslant r = \max_{\eta \in \gamma_\nu} |z_0 - \eta| < R = \min_{\eta \in \gamma_1 + \ldots + \gamma_{\nu-1} + \gamma_{\nu+1} + \ldots + \gamma_m} |z_0 - \eta|,$$

entonces en el anillo $r < |z - z_0| < R$ la función $f(z)$ puede ser representada por su serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z_0)(z-z_0)^n, \quad r < |z-z_0| < R,$$

cuyos coeficientes $c_n(z_0)$ se determinan según las fórmulas (2).

Se llama serie de Laurent para la función $f(z)$ *en el entorno del punto* $z = \infty$ la serie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \left(\text{ó } \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\right), \tag{3}$$

que converge en cierto anillo $r < |z| < \infty$ ($r < |z-a| < \infty$, respectivamente), además, la parte principal de la serie de Laurent es $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n\right)$ y la parte regular es la serie $\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n \times$ $\times \left(\sum_{n=-\infty}^{0} c_n (z-a)^n\right)$.

EJEMPLO 2. Desarróllese en serie de Laurent de potencias de z la función $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$.

◀ Ya que la analiticidad de la función se altera en los puntos $z = 0$ y $z = 1$, la región de convergencia de la serie de Laurent será el anillo $0 < |z| < 1$. Señalando que para $n \leqslant -2$ la función $\dfrac{1}{z^{n+2}(1-z)}$ es analítica en el círculo $|z| \leqslant \rho < 1$, podemos escribir que

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{1}{z^{n+2}(1-z)}\, dz = 0$$

para $n = -2, -3, \ldots$

Luego, aplicando la fórmula de Cauchy para la función $\varphi(z) = \dfrac{1}{1-z}$ y sus derivadas, para $n \geqslant -1$ podemos escribir

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{\varphi(z)}{z^{n+2}}\, dz = \frac{\varphi^{n+1}(0)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{(n+1)!}{(1-z)^{n+2}}\Big|_{z=0} = 1.$$

De este modo, para $0 < |z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{4}$$

es decir, la parte principal contiene un término y la parte regular, un número infinito de términos. ▶

El cálculo de las integrales de contorno (2), como regla general, es bastante difícil. Por eso, para desarrollar las funciones en las series de Laurent se emplean procedimientos artificiales. Así pues, en el ejemplo 2 se podría representar la función $f(z)$ en forma de la suma de fracciones, es decir,

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z},$$

con la particularidad de que el primer sumando es ya el desarrollo en serie de Laurent de potencias de z y el segundo sumando es la suma de la progresión geométrica con denominador z, es decir, tenemos el desarrollo (4).

Hállense las regiones de convergencia y las sumas de las series siguientes:

5.1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^n}$. 5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ni^n2^n}{(z+i)^{n+1}}$.

5.3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n+3}}{n!}$.

5.4. $\sum_{n=-\infty}^{2}(n+1)\,i^{n+2}(z-1)^n$.

Hállense todos los desarrollos de las funciones indicadas en series de Laurent de potencias de $z-z_0$ y determínense las regiones de convergencia de los desarrollos obtenidos:

5.5. $\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=1$. 5.6*. $\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=\infty$.

5.7*. $\frac{z}{(z^2+1)^2}$, $z_0=i$.

5.8*. $\frac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_0=\infty$.

5.9. $\frac{\cos z}{z^3}$, $z_0=0$. 5.10. $\frac{\cos z}{z^3}$, $z_0=\infty$.

5.11. $\operatorname{sen}\frac{1}{z-2}$, $z_0=2$. 5.12. $z^2e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$.

5.13. $z^2e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=\infty$. 5.14. $\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$.

5.15. Hállense los tres primeros términos del desarrollo de la función $f(z)=\operatorname{sen}\frac{1}{1-z}$ en serie de Laurent en el

entorno del punto $z_0 = \infty$. ¿Cuál es la región de convergencia de esta serie?

2. Carácter de los puntos singulares aislados. El punto z_0 se llama *regular* para la función $f(z)$ analítica en la región D, si existe tal serie potencial $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0) (z - z_0)^n$ con el radio de convergencia $r(z_0) > 0$ tal, que en la parte común del círculo de convergencia $|z - z_0| < r(z_0)$ y la región D la suma de esta serie $\varphi_{z_0}(z)$ coincide con $f(z)$. Los puntos que no son regulares se llaman *singulares*.

El punto z_0 se llama punto singular *aislado* de la función $f(z)$, si $f(z)$ es una función uniforme analítica en el anillo $0 < |z - z_0| < R$ y z_0 es un punto singular.

Análogamente el punto $z_0 = \infty$ se llama punto singular aislado de la función $f(z)$, si $f(z)$ es una función uniforme analítica en el anillo $r < |z| < \infty$ y $z = \infty$ es un punto singular.

El punto singular aislado z_0 de la función $f(z)$ se llama:

punto singular evitable, si existe el límite finito

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \neq \infty;$$

polo de orden $m \geqslant 1$, si para la función $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ el punto z_0 es un cero de orden m, es decir, $g(z)$ tiene el aspecto $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$ (es evidente que si z_0 es polo, entonces $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$);

punto singular esencial, si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ no existe.

Es cómodo investigar el carácter del punto singular infinitamente alejado, sustituyendo $z = \dfrac{1}{\eta}$; esta sustitución hace pasar el punto infinitamente alejado $z = \infty$ al punto $\eta = 0$.

EJEMPLO 3. Hállense todos los puntos singulares de la función $f(z) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{z}} + 1}$ y determínese su carácter.

Los puntos singulares son el punto $z = 0$ y los puntos en los que el denominador se reduce a cero.

Tenemos $e^{\frac{1}{z}} + 1 = 0$ ó $e^{\frac{1}{z}} = -1 = e^{2\pi m i + \pi i}$, es decir, $e^{\frac{1}{z}} + 1 = 0$, si $\dfrac{1}{z_m} = (2m + 1)\pi i$, $m \in \mathbb{Z}$, además estos puntos son ceros de primer orden. Por consiguiente, en los puntos $z_m = \dfrac{1}{(2m+1)\pi i}$, $m \in \mathbb{Z}$, la función $f(z)$ tiene polos de primer orden. El punto $z = 0$ no es un punto singular aislado, ya que es el límite de los polos, pues $\lim_{m \to \infty} z_m = 0$. ▶

5.16*. Demuéstrese, que si en el desarrollo (1) falta la parte principal, es decir, todos los coeficientes c_n con núme-

ros negativos ($n = -1, -2, \ldots$) son nulos, entonces esto hecho es una condición necesaria y suficiente, de que el punto z_0 es un punto singular evitable de la función $f(z)$.

5.17*. Demuéstrese que la existencia en la parte principal del desarrollo (1) de no más que $m \geqslant 1$ términos, además $c_{-m} \neq 0$ y $c_{-n} = 0$ para $n \geqslant m + 1$, es una condición necesaria y suficiente de que el punto z_0 es el polo de orden m para la función $f(z)$.

5.18*. Demuéstrese que si z_0 es un punto singular esencial de la función $f(z)$, entonces existe la sucesión de puntos (z_n), $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, tal, que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

5.19*. Apoyándose en el resultado del problema 5.18 demuéstrese, que si z_0 es un punto singular esencial de la función $f(z)$, entonces para cualquier número complejo $A \neq \infty$ existe la sucesión de puntos $(z_n(A))$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(A) = z_0$ tal, que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n(A)) = A$.

5.20. Determínese la región de convergencia de las partes regular y principal del desarrollo de Laurent (3) en el entorno del punto infinitamente alejado.

Indíquense todos los puntos singulares finitos de las funciones dadas más abajo y determínese su carácter:

5.21. $\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$. **5.22.** $\dfrac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$.

5.23. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$. **5.24.** $\operatorname{tg}^2 z$.

5.25. $e^{\frac{1}{z-3i}}$. **5.26.** $\cos\dfrac{1}{z+2i}$.

5.27. $\operatorname{tg}\dfrac{1}{z-1}$. **5.28.** $\dfrac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1}$.

5.29. $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ **5.30.** $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^5}$.

5.31. $\dfrac{1}{e^z-3}$.

Para las funciones dadas más abajo aclárese el carácter del punto singular infinitamente alejado (considérese regular el punto singular evitable):

5.32. $\dfrac{z^2}{5-2z^2}$. **5.33.** $\dfrac{3z^5-5z+2}{z^2+z-4}$.

5.34. $\frac{z}{1-3z^4}$. **5.35.** $1-z+2z^2$.

5.36. e^{-z}. **5.37.** $\cos z$.

5.38. $e^{\frac{1}{z}}+2z^2-5$. **5.39.** $e^{\frac{1}{z^2}}$.

5.40. $e^{\frac{1}{3-2z}}$. **5.41.** $e^{-2z}+3z^3-z+8$.

§ 6. Residuos y sus aplicaciones

1. Residuo de la función y su cálculo. Si la función $f(z)$ es analítica en cierto entorno del punto z_0, excepto, quizás, el mismo punto z_0, entonces se llama *residuo* de la función $f(z)$ respecto al punto z_0, designado por $\operatorname{res}[f(z);\ z_0]$, el número igual al valor de la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\eta)\,d\eta$, donde C es un contorno cerrado simple, situado en la región de analiticidad de $f(z)$, que contiene en su interior sólo un punto singular z_0. En calidad de C es cómodo tomar la circunferencia $|\eta - z_0| = \rho$ de radio bastante pequeño ρ.

El residuo de la función coincide con el coeficiente c_{-1} del desarrollo de $f(z)$ en la serie de Laurent según las potencias de $(z-z_0)$, es decir,

$$\operatorname{res}[f(z);\ z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta - z_0|=\rho} f(\eta)\,d\eta.$$

Si $z_0 = \infty$ es un punto singular aislado de la función $f(z)$, entonces

$$\operatorname{res}[f(z);\ \infty] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R^-} f(\eta)\,d\eta,$$

donde $C_R^- = \{\eta \mid |\eta| = R\}$, R es bastante grande y el recorrido del contorno se realiza en sentido horario. Señalemos que si

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad r < |z| < \infty,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=\rho>r} \frac{f(\eta)}{\eta^{n+1}}\,d\eta, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

entonces

$$\operatorname{res}[f(z);\ \infty] = -c_{-1}.$$

Si z_0 es un polo de primer orden de la función $f(z)$, entonces

$$\operatorname{res}[f(z);\ z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

además, si $f(z)$ es representable en la forma de $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, donde $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, entonces

$$\operatorname{res}[f(z),\ z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Si z_0 es un polo de orden $m \geqslant 2$ de la función $f(z)$, entonces

$$\operatorname{res}[f(z);\ z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}((z-z_0)^m f(z))}{\partial z^{m-1}}.$$

EJEMPLO 1. Hállese $\operatorname{res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+9};\ 3i\right]$.

◀ Puesto que el punto $z_0 = 3i$ es un polo de primer orden, entonces

$$\operatorname{res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+9};\ 3i\right] = \lim_{z \to 3i}(z-3i)\ \frac{e^{iz}}{(z+3i)(z-3i)} =$$

$$= \frac{e^{i \cdot 3i}}{6i} = -\frac{i}{6e^3}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Hállese $\operatorname{res}\left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3};\ 1\right]$.

◀ El punto $z_0 = 1$ es un polo de tercer orden, por eso

$$\operatorname{res}\left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3};\ 1\right] = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 1} \frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3 \frac{\cos 2z}{(z-1)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 1}(-2^2 \cos 2z) = -2\cos 2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Hállese $\operatorname{res}[e^{\frac{3}{z-2}};\ 2]$.

◀ El punto $z_0 = 2$ es esencialmente singular, por eso para hallar el residuo determinemos el coeficiente c_{-1} del desarrollo $e^{\frac{3}{z-2}}$ en la serie de Laurent de potencias de $(z-2)$. Ya que

$$e^{\frac{3}{z-2}} = 1 + \frac{3}{z-2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{3}{z-2}\right)^2 + \ldots,\ 0 < |z-2| < \infty,$$

entonces $c_{-1} = 3$. Por consiguiente,

$$\operatorname{res}[e^{\frac{3}{z-2}};\ 2] = 3. \blacktriangleright$$

Hállense los residuos de las funciones dadas más abajo respecto a cada uno de sus polos distintos de ∞:

6.1. $\frac{z^2+1}{z-2}$. **6.2.** $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$. **6.3.** $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

6.4. $\frac{\operatorname{sen} 2z}{(z-1)^4}$. **6.5.** $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. **6.6.** $\operatorname{tg} z$.

6.7. $\operatorname{ctg}^2 z$. 6.8. $\frac{\cos^3 z}{z^3}$. 6.9. $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

6.10. $\frac{1}{z(1-z^2)}$. 6.11. $\frac{1}{z^2-z^5}$. 6.12. $\frac{\cos 4z}{(z-2)^6}$.

Hállense los residuos de las funciones respecto al punto $z_0 = 0$:

6.13. $e^{\frac{1}{z}}$. 6.14. $\cos\frac{1}{z}$. 6.15. $\operatorname{sen}\frac{1}{z}$.

Hállense los residuos de las funciones respecto al punto $z_0 = \infty$:

6.16. $\operatorname{sen}\frac{1}{z}$. 6.17. $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$.

6.18*. $\frac{\operatorname{sen} z}{z^2+9}$. 6.19. $\frac{z^4+z}{z^6-1}$. 6.20. $z\cos^2\frac{\pi}{4}$.

6.21. $\frac{z^2}{z-1}\operatorname{sen}\frac{1}{z}$.

2. Teoremas sobre los residuos y sus aplicaciones al cálculo de las integrales de contorno.

PRIMER TEOREMA SOBRE LOS RESIDUOS. *Si la función $f(z)$ es analítica en la región D, excepto los puntos singulares aislados $z_1, z_2, \ldots, z_N$ situados en esta región, entonces para cualquier contorno cerrado simple $C \subset D$ que abarca los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_N$, se tiene*

$$\int_{C+} f(\eta)\,d\eta = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z);\ z_k].$$

SEGUNDO TEOREMA SOBRE LOS RESIDUOS. *Si $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo, excepto los puntos singulares aislados $z_1, z_2, \ldots, z_{N-1}$ y $z_N = \infty$, entonces*

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z);\ z_k] = 0.$$

EJEMPLO 4. Calcúlese la integral $\int_{C+} \frac{e^z}{z^2+4}\,dz$, donde $C = \{z \mid |z| = 3\}$.

◀ Puesto que en el interior del contorno C se encuentran dos puntos singulares de la función subintegral, los polos de primer orden $z_{1,2} = \pm 2i$, entonces, aplicando el primer teorema sobre los residuos, podemos escribir

$$\int_C \frac{e^z}{z^2+4}\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2+4};\ 2i\right] + \operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2+4};\ -2i\right]\right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^z}{2z} \Big|_{z=2i} + \frac{e^z}{2z} \Big|_{z=-2i} \right) = 2\pi i \left(\frac{e^{2i}}{4i} - \frac{e^{-2i}}{4i} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} (e^{2i} - e^{-2i}) = \pi i \operatorname{sen} 2 = \pi \operatorname{sh} 2i. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 5. Calcúlese la integral

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^{10}+1}.$$

◀ La función subintegral $f(z) = \frac{1}{z^{10}+1}$ tiene diez puntos singulares $z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}$, $k = 0, 1, \ldots, 9$, que son polos simples situados en la circunferencia unitaria. Ya que el desarrollo de la función en el entorno del punto infinitamente alejado tiene la forma

$$\frac{1}{z^{10}+1} = \frac{1}{z^{10}\left(1+\frac{1}{z^{10}}\right)} = \frac{1}{z^{10}}\left(1 - \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^{20}} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^{10}} - \frac{1}{z^{20}} + \frac{1}{z^{30}} - \ldots, \quad 1 < |z| < \infty,$$

entonces $-c_{-1} = \operatorname{res}\left[\frac{1}{z^{10}+1}; \infty\right] = 0$. Por eso, aplicando el segundo teorema sobre los residuos podemos escribir que

$$\sum_{k=0}^{9} \operatorname{res}\left[\frac{1}{z^{10}+1}; e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}\right] = -\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^{10}+1}; \infty\right] = 0.$$

De este modo,

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^{9} \operatorname{res}\left[\frac{1}{z^{10}+1}; e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}\right] = 0. \blacktriangleright$$

Empleando los teoremas sobre los residuos, calcúlense las siguientes integrales:

6.22. $\int_{C+} \frac{dz}{z^4+1}$, donde $C = \{z \mid |z-1| = 1\}$.

6.23. $\int_{C-} \frac{dz}{z^4+1}$, donde $C = \{z \mid |z-1| = 1\}$.

6.24. $\int_{C+} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-1)}$, donde $C = \{z \mid |z-2| = 2\}$.

6.25. $\int\limits_{C+} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)}$, donde $C=\left\{z \mid |z-2|=\frac{1}{2}\right\}$.

6.26. $\int\limits_{C-} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)}$, donde $C=\left\{z \mid |z-2|=\frac{1}{2}\right\}$.

6.27. $\int\limits_{C+} \frac{e^z\,dz}{z^2(z^2+9)}$, donde $C=\{z \mid |z|=1\}$.

6.28*. $\int\limits_{C+} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+9}\,dz$, donde $C=\{z \mid |z|=4\}$.

6.29. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$, donde $C=\{z \mid |z|=1\}$,

n es un número natural y $0 \leqslant |a| < 1 < |b|$.

6.30*. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$, donde $C=\{z \mid |z|=1\}$,

n es un número natural y $0 \leqslant |a| < |b| < 1$.

6.31. $\int\limits_{C+} \operatorname{sen}\frac{1}{z}\,dz$, donde $C=\{z \mid |z|=r>0\}$.

6.32. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, donde $C=\{z \mid |z|=R<1\}$.

6.33. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, donde $C=\{z \mid |z|=R>1\}$.

6.34. $\int\limits_{C+} \frac{z+1}{e^z+1}\,dz$, donde $C=\{z \mid |z|=2\}$.

6.35. $\int\limits_{C+} \frac{z+1}{e^z+1}\,dz$, donde $C=\{z \mid |z|=4\}$.

3. Aplicación de los residuos al cálculo de las integrales definidas.

a) Las integrales de tipo $\int\limits_0^{2\pi} R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, donde R es el símbolo de la función racional se reduce, sustituyendo $z=e^{ix}$, a las integrales de contorno de las funciones racionales respecto a z.

EJEMPLO 6. Calcúlese la integral de Poisson

$$I(p) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2}, \quad |p| \neq 1.$$

◀ Sustituyendo $z = e^{ix}$, $dz = ie^{ix}\,dx = iz\,dx$,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

obtenemos

$$I(p) = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(1 - p\frac{z^2+1}{z} + p^2\right)} =$$

$$= -i\int_{|z|=1} \frac{dz}{-pz^2 + p^2 z - z + p} = i\int_{|z|=1} \frac{dz}{p(z-p)\left(z - \frac{1}{p}\right)}.$$

Puesto que para todo p, $|p| \neq 1$, dentro del círculo $|z| \leqslant 1$ se encuentra sólo una raíz del denominador de la función subintegral, para $|p| < 1$ tenemos:

$$I(p) = \frac{2\pi i^2}{p} \operatorname{res}\left[\frac{1}{(z-p)\left(z - \frac{1}{p}\right)};\ p\right] = \frac{2\pi}{1-p^2},$$

y si $|p| > 1$, entonces

$$I(p) = \frac{2\pi i^2}{p} \operatorname{res}\left[\frac{1}{(z-p)\left(z - \frac{1}{p}\right)};\ \frac{1}{p}\right] = -\frac{2\pi}{p^2-1}.$$

De este modo,

$$I(p) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{1-p^2} & \text{para} \quad |p| < 1, \\ \dfrac{2\pi}{p^2-1} & \text{para} \quad |p| > 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

b) Las integrales de tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, donde $f(x)$ es una función continua en $(-\infty, +\infty)$, analítica en el semiplano superior, excepto un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_N$, situados en la parte finita del semiplano superior, y que satisface, para $|z|$ suficientemente grandes la condición

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad M > 0, \quad \delta > 0.$$

En este caso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}\,[f(z);\ z_k]. \qquad (1)$$

EJEMPLO 7. Calcúlese la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.

◀ En el semiplano superior la función $f(z)=\frac{1}{(z^2+9)^2}$ tiene un polo de segundo orden en el punto $z_0=3i$ y $|f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^4}$ para z suficientemente grandes. Por eso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2} = 2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{1}{(z^2+9)^2};\ 3i\right] =$$

$$= 2\pi i \frac{d}{dz}\left((z-3i)^2 \frac{1}{(z^2+9)^2}\right)\Big|_{z=3i} =$$

$$= 2\pi i \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+3i)^2}\right)\Big|_{z=3i} = -\frac{4\pi i}{(z+3i)^3}\Big|_{z=3i} =$$

$$= -\frac{4\pi i}{(6i)^3} = \frac{\pi}{54}. \blacktriangleright$$

OBSERVACIÓN. La fórmula (1) es válida también en el caso, cuando la función $f(z)$ tiene la forma $f(z) = e^{i\alpha z} F(z)$, donde $\alpha > 0$ y la función $F(z)$ es analítica en el eje real; en el semiplano superior tiene sólo el número finito de los puntos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_N$ y $\lim_{z\to\infty} F(z) = 0$.

EJEMPLO 8. Calcúlese la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2-2x+10}\,dx$.

◀ La función subintegral es la parte imaginaria de la función $\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}$, cuyos valores coinciden con los valores de la función $f(z)=\frac{z}{z^2-2z+10}e^{iz}$ en el eje real. La función $F(z)=\frac{z}{z^2-2z+10}$ tiene en el semiplano superior el polo de primer orden en el punto $z_0=1+3i$ y $\lim_{z\to\infty} F(z)=0$, es decir, están cumplidas las condiciones enunciadas en la observación y por eso podemos escribir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx = 2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10};\ 1+3i\right] =$$

$$= 2\pi i \frac{(1+3i)\, e^{i(1+3i)}}{2(1+3i-1)} = \frac{\pi}{3}(1+3i)\, e^{-3+i} =$$

$$= \frac{\pi}{3} e^{-3} (\cos 1 - 3 \operatorname{sen} 1 + i (3 \cos 1 + \operatorname{sen} 1)).$$

De este modo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 - 2x + 10}\, dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - 2x + 10}\, dx =$$

$$= \frac{\pi e^{-3}}{3} (3 \cos 1 + \operatorname{sen} 1).$$

Señalemos que simultáneamente calculamos la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10}\, dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - 2x + 10}\, dx =$$

$$= \frac{\pi e^{-3}}{3} (\cos 1 - 3 \operatorname{sen} 1). \blacktriangleright$$

Aplicando uno de los métodos estudiados más arriba calcúlense las integrales definidas.

6.36. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x}$, $a > 1$.

6.37. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2}$, $a > b > 0$.

6.38. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\, dx$.

6.39. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

6.40. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$, $a > 0$, $b > 0$.

6.41. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2 + a^2)^2}$, $a > 0$.

6.42. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+4x+20}\, dx.$

6.43. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2+x+1}\, dx.$

6.44. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2+b^2}\, dx,\ a>0,\ b>0.$

6.45. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\, dx.$ 6.46. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+5x^2+4}\, dx.$

4. **Principio del argumento.** Supongamos que la función $f(z)$ en la región D acotada por el contorno cerrado simple C, tiene un número finito N de ceros y un número finito P de polos, donde cada cero y cada polo se cuentan tantas veces, cuanta es su multiplicidad, con la particularidad de que no tienen ceros ni polos en el contorno C. Entonces la diferencia $\omega = N - P$ es igual al número de revoluciones del radio vector $w = f(z)$, cuando el punto z recorre el contorno C.

Si $f(z)$ es analítica en D, $P = 0$ y $\omega = N$.

EJEMPLO 9. Hállese el número de ceros del polinomio $p(z) = z^3 - 3z + 1$ situado en el semiplano derecho.

◀ Examinemos el contorno C que consta de la semicircunferencia C_R de radio R, situada en el semiplano derecho y del segmento del eje imaginario $[-iR, iR]$, y apliquemos a este contorno para R suficientemente grande, el principio del argumento.

Ya que

$$p(z) = z^3\left(1 - \frac{3}{z^3} \frac{1}{z^3}\right),$$

entonces es evidente, que cuando el punto z recorre el contorno C_R en sentido antihorario, $\arg z$ adquiere el incremento π y por eso $\arg(z^3)$ recibe el incremento 3π $\left(C_R \text{ se aplica en la curva } w = R^3 e^{i\varphi},\ -\frac{3\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}\right)$. Puesto que el segundo factor en (2) para R suficientemente grande es próximo a 1, entonces el incremento del argumento de este factor es también pequeño. Sea ahora $z = it$, es decir, el punto z se mueve por el eje imaginario desde el punto iR hasta el punto $-iR$. En este caso se tiene

$$p(it) = u + iv = 1 - i(t^3 + 3t), \quad \text{es decir,} \quad \begin{aligned} u &= 1, \\ v &= -t^3 - 3t. \end{aligned}$$

Esto significa, que al variar t desde R hasta $-R$ para $R \to +\infty$, $\arg p(it)$ varía en π $\left(\text{desde } -\frac{\pi}{2} \text{ hasta } +\frac{\pi}{2}\right)$. Así pues el incremento total $\arg p(z)$ al recorrer el contorno es igual a 4π, lo que significa que $N = 2$, es decir, en el semiplano derecho el polinomio $p(z) = z^3 - 3z + 1$ tiene dos ceros. ▶

Para los polinomios dados hállese la cantidad de raíces situadas en el semiplano derecho:

6.47*. $p(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$.
6.48. $p(z) = 2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1$.
6.49. $p(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$.

6.50*. Demuéstrese que si las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas en la región cerrada $\bar{D} = D + \Gamma$ y para los puntos $\eta \in \Gamma$ es válida la desigualdad $|\varphi(\eta)| < |f(\eta)|$, entonces el número de ceros de la función $F(z) = f(z) + \varphi(z)$, situados en la región D, coincide con el número de ceros de la función $f(z)$ (*teorema de Rouchè*).

6.51*. Demuéstrese el teorema fundamental del álgebra superior: el polinomio $p_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ del grado n tiene en el plano (z) exactamente n ceros.

Apoyándose sobre el teorema de Rouchè (problema 6.50), hállese el número de ceros de las funciones dadas en las regiones indicadas:

6.52. $F(z) = z^5 + 2z^2 + 8z + 1$: a) en el círculo $|z| < 1$; b) en el anillo $1 \leqslant |z| < 2$.

6.53. $F(z) = z^8 - 5z + 1$: a) en el círculo $|z| < 1$; b) en el anillo $1 \leqslant |z| < 2$; c) en el anillo $2 \leqslant |z| < 3$.

§ 7. Series de Fourier. Integral de Fourier

1. Desarrollo de las funciones en series trigonométricas de Fourier. Sistema trigonométrico de funciones.

$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \ldots$ es *ortogonal* en el segmento $[-\pi, \pi]$ (como, además, en cualquier segmento de 2π de longitud), es decir, la integral respecto a este segmento, del producto de dos cualesquiera funciones distintas de este sistema, es igual a cero.

$$\text{Si } f(x) \in L(-\pi, \pi) \left(\text{es decir, } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < \infty\right),$$

entonces existen los números

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx,$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

que se llaman *coeficientes de Fourier* de la función $f(x)$; la serie

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx) \tag{1}$$

se denomina *serie de Fourier* de la función $f(x)$. Los términos de la serie (1) pueden ser anotados en forma de armónicas

$$a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx=A_k\cos(kx-\varphi_k)$$

con una *amplitud* $A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$, *frecuencia* $\omega_k=k$ y *fase* $\varphi_k=\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k}$.

Para la función $f(x)$ tal, que $f^2(x)\in L(-\pi,\pi)$ es válida la *igualdad de Parseval*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

Si es que $f(x)\in L\left(-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)$ el coeficiente de Fourier se escribe en la forma

$$\alpha_k=\frac{2}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)\cos\frac{2\pi kx}{l}\,dx,\quad \beta_k=\frac{2}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)\times$$

$$\times\operatorname{sen}\frac{2\pi kx}{l}\,dx, \tag{2}$$

y la serie de Fourier, en la forma

$$S(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos\frac{2\pi kx}{l}+\beta_k\operatorname{sen}\frac{2\pi kx}{l}\right)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{2\pi kx}{l}}. \tag{3}$$

La última serie se llama *serie de Fourier en forma compleja*. Aquí

$$c_k=\frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)\,e^{-i\frac{2\pi kx}{l}}\,dx,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

y para $k\geqslant 0$

$$c_k=\frac{\alpha_k-i\beta_k}{2},\qquad c_{-k}=\frac{\alpha_k+i\beta_k}{2}=\bar{c}_k.$$

Las sumas de las series (1) y (3) tienen los períodos 2π y l, respectivamente.

La función $f(x)$ se llama *suave a trozos* en el segmento $[a, b]$, si la misma función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ tienen en $[a, b]$ un número finito de puntos de discontinuidad de primer género.

TEOREMA. *Si la función periódica $f(x)$ con período l es suave a trozos en el segmento $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$, entonces la serie de Fourier* (3) *converge hacia el valor de $f(x)$ en cada punto de continuidad suyo y hacia el valor $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ en los puntos de discontinuidad, es decir,*

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{l}}. \qquad (4)$$

Si, adicionalmente, $f(x)$ es continua en todo el eje, la serie (4) *converge hacia $f(x)$ uniformemente.*

EJEMPLO 1. Desarróllese en serie de Fourier la función

$$f(x) = \operatorname{sign} x, \quad -\pi < x < \pi,$$

y empleando el desarrollo, hállese la suma de la serie de Leibniz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

◀ Puesto que la función es impar, entonces (véase el problema 7.2)

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sign} x \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{x=0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(2m-1)} & \text{para } n=2m-1, \\ 0 & \text{para } n=2m, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Por consiguiente, para $-\pi < x < \pi$

$$\operatorname{sign} x = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2m-1)x}{2m-1}$$

de donde para $x = \pi/2$ obtendremos

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1},$$

es decir,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleright$$

7.1. Demuéstrese que si $f(x)$ tiene el período l, entonces, para todo $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+l} f(x)\,dx = \int_0^{l} f(x)\,dx = \int_{-l/2}^{l/2} f(x)\,dx.$$

7.2. Anótense las expresiones de los coeficientes de Fourier (2) para las funciones par e impar en $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$.

Desarróllese la función periódica con el período l en serie de Fourier, constrúyanse las gráficas de sus primeras sumas parciales $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ y hállese el valor de $S(x_0)$ de la suma de la serie obtenida en el punto dado x_0:

7.3. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } 0 < x < \pi, \\ 0 \text{ para } -\pi < x < 0, \end{cases}$ $l = 2\pi$, $x_0 = \pi$.

7.4. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ para $0 < x < 2\pi$, $l = 2\pi$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

7.5. $f(x) = |x|$ para $x \in (-1, 1)$, $l = 2$, $x_0 = 1$.

En los problemas 7.6—7.10, definiendo complementariamente de un modo determinado la función $f(x)$ dada en el intervalo $(0, a)$ hasta la periódica, obténgase para ella la serie de Fourier requerida.

7.6. $f(x) = e^x$ para $x \in (0, \ln 2)$. Desarróllese en serie de cosenos.

7.7. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } 0 < x < \pi/2, \\ 0 \text{ para } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$

Desarróllese en serie de senos.

7.8. $f(x) = x^2$ para $0 \leqslant x < 1$. Desarróllese en serie de cosenos.

7.9. $f(x) = \begin{cases} x \text{ para } 0 \leqslant x < 1, \\ 2 - x \text{ para } 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$

Desarróllese en serie de senos.

7.10. $f(x) = x \operatorname{sen} x$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Desarróllese en serie de senos.

7.11. Empleando la serie de Fourier, obtenida en el problema 7.5, hállense las sumas de las series siguientes:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$; b)* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(4k+1)^2(4k+3)^2}$.

7.12. Empleando la serie de Fourier, obtenida en el problema 7.8, hállese la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2}$.

7.13. Empleando la igualdad de Parseval para la función del problema 7.4, hállese la suma de serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

7.14*. Conociendo la expresión del *núcleo de Dirichlet*

$$\mathscr{D}_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}},$$

hállese la expresión del *núcleo de Fejer* $\mathscr{F}_n(x)$:

$$\mathscr{F}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathscr{D}_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kx.$$

2. Series dobles de Fourier. Si la función $f(x, y)$ tiene un período l respecto a la variable x, período h respecto a la variable y, es continua y tiene las derivadas parciales continuas $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en el cuadrado $K = \left\{(x, y) : -\frac{l}{2} \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}, -\frac{h}{2} \leqslant y \leqslant \frac{h}{2}\right\}$, entonces $f(x, y)$ es representable por la serie doble de Fourier

$$f(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{m, n} \left(a_{m, n} \cos \frac{2\pi m x}{l} \cos \frac{2\pi n y}{h} + \right.$$

$$+ b_{m, n} \operatorname{sen} \frac{2\pi m x}{l} \cos \frac{2\pi n y}{h} + c_{m, n} \cos \frac{2\pi m x}{l} \operatorname{sen} \frac{2\pi n y}{h} +$$

$$\left. + d_{mn} \operatorname{sen} \frac{2\pi m x}{l} \operatorname{sen} \frac{2\pi n y}{h}\right),$$

donde

$$\lambda_{m, n} = \begin{cases} 1/4 & \text{para } m + n = 0, \\ 1/2 & \text{para } m > 0, \ y = 0 \text{ ó } m = 0, \ n > 0, \\ 1 & \text{para } m > 0, \ n > 0 \end{cases}$$

y para $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$

$$a_{m, n} = \frac{4}{lh} \iint_K f(x, y) \cos \frac{2\pi m x}{l} \cos \frac{2\pi n y}{h} \, dx \, dy,$$

$$b_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint\limits_K f(x,\,y)\,\operatorname{sen}\frac{2\pi mx}{l}\cos\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy,$$

$$c_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint\limits_K f(x,\,y)\cos\frac{2\pi mx}{l}\operatorname{sen}\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy,$$

$$d_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint\limits_K f(x,\,y)\,\operatorname{sen}\frac{2\pi mx}{l}\operatorname{sen}\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy$$

En la forma compleja la serie de Fourier para $f(x,\,y)$ se anota en la forma siguiente

$$f(x,\,y)=\sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty}c_{m,\,n}e^{2\pi i\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}\right)},$$

donde

$$c_{m,\,n}=\frac{1}{lh}\iint\limits_K f(x,\,y)\,e^{-2\pi i\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}\right)}dx\,dy,\quad m,\ n\in\mathbb{Z}.$$

EJEMPLO 2. Desarróllese en serie doble de Fourier la función $f(x,\,y)=xy$ en el cuadrado $-\pi<x<\pi$, $-\pi<y<\pi$.

◀ Tomando en consideración la paridad o imparidad de las funciones subintegrales, hallamos

$$a_{m,\,n}=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_K xy\cos mx\cos ny\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}y\cos ny\,dy\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\cos mx\,dx=0,\quad m,\ n\neq 0;$$

$$b_{m,\,n}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}y\cos ny\,dy\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\operatorname{sen}mx\,dx=0,\quad m,\ n\neq 0;$$

$$c_{m,\,n}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}y\operatorname{sen}ny\,dy\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\cos mx\,dx=0,\quad m,\ n\neq 0;$$

$$d_{m,\,n}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}y\operatorname{sen}ny\,dy\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\operatorname{sen}mx\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{0}^{\pi}y\operatorname{sen}ny\,dy\int\limits_{0}^{\pi}x\operatorname{sen}mx\,dx=$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{y}{n}\cos ny\Big|_0^{\pi} + \frac{\operatorname{sen} ny}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right)\left(-x\,\frac{\cos mx}{m}\Big|_0^{\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sen} mx}{m^2}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{\pi(-1)^{m+1}}{m} = (-1)^{m+n}\,\frac{4}{mn},$$

$$m,\ n \geqslant 1.$$

Por consiguiente, para $x \in (-\pi, \pi)$, $y \in (-\pi, \pi)$

$$xy = 4\sum_{m,\,n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\,\frac{\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny}{mn}. \blacktriangleright$$

Desarróllense en serie doble de Fourier las funciones siguientes:

7.15. $f(x, y) = xy$ para $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$, $l = h = 2\pi$.

7.16. $f(x, y) = \frac{\pi - x}{2}\cdot\frac{\pi - y}{2}$ para $-\pi < x < \pi$, $-\pi < y < \pi$, $l = h = 2\pi$.

7.17. $f(x, y) = x^2 y$ para $-1 < x < 1$, $-2 < y < 2$, $l = 2$, $h = 4$.

7.18. $f(x, y) = x\left(\frac{\pi - y}{2}\right)^2$ para $-1 < x < 1$, $-\pi < y < \pi$, $l = 2$, $h = 2\pi$.

3. Integral de Fourier. Si la función $f(t)$ es absolutamente integrable en $(-\infty, +\infty)$, es decir, $f(t) \in L(-\infty, +\infty)$ y es suave a trozos en cada segmento finito del eje real, entonces es representable en forma de la integral de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}\hat{f}(\nu)\times$$

$$\times e^{2\pi i\nu t}\,d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\nu)\,e^{2\pi i\nu t}\,d\nu, \tag{5}$$

donde

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-2\pi i\nu t}\,dt. \tag{6}$$

La transformación (6), que se designará por $\mathfrak{F}[f]$, se llama *directa* y la (5), *transformación inversa de Fourier*, expresada en la forma com-

pleja. En la forma real estas transformaciones se anotan así

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt,\quad b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\operatorname{sen}\omega t\,dt \tag{7}$$

(directa) y

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}(a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\operatorname{sen}\omega t)\,d\omega \tag{8}$$

(inversa), $\omega = 2\pi\nu$.

Si la función $f(t)$ es par, (7) y (8) se escriben en la siguiente forma simétrica:

$$\mathfrak{F}_c[f]=\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt \tag{9}$$

y

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\hat{f}_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega \tag{10}$$

y se llaman par de *coseno-transformaciones de Fourier*. Si la función $f(t)$ es impar, tenemos un par de *seno-transformaciones de Fourier*

$$\mathfrak{F}_s[f]=\hat{f}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\operatorname{sen}\omega t\,dt$$

y

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\hat{f}_s(\omega)\operatorname{sen}\omega t\,d\omega.$$

EJEMPLO 3. Hállese la transformación de Fourier para la función $f(t)=e^{-\alpha|t|}$, $\alpha>0$.

◀ Sustituyendo $f(t)$ dada en (6), obtenemos

$$\hat{f}(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-2\pi i\nu t}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{-(2\pi i\nu-\alpha)t}\,dt+$$

$$+\int_{0}^{+\infty} e^{-(2\pi i\nu+\alpha)t}\,dt=\frac{1}{\alpha-2\pi i\nu}e^{(\alpha-2\pi i\nu)t}\Big|_{-\infty}^{0}-$$

$$-\frac{1}{\alpha+2\pi i\nu}e^{-(2\pi i\nu+\alpha)t}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\alpha-2\pi i\nu}+\frac{1}{\alpha+2\pi i\nu}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\nu^2},$$

es decir,

$$\mathfrak{F}\{e^{-\alpha|t|}\} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2\nu^2}, \quad \alpha > 0.$$

Sustituyendo esta expresión en (5) obtenemos

$$e^{-\alpha|t|} = 2\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i\nu t}}{\alpha^2 + 4\pi^2\nu^2}\, d\nu = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha^2 + \omega^2} \times$$

$$\times\, d\omega = \frac{2\alpha}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\alpha^2 + \omega^2}\, d\omega.$$

La última igualdad se deriva de que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega t}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} \frac{\operatorname{sen} \omega t}{\alpha^2 + \omega^2}\, d\omega = 0. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 4. Hállese la transformación de Fourier para la función

$$f(t) = e^{-\alpha t^2}, \quad \alpha > 0.$$

◀ Ya que la función $f(t)$ es par, obtendremos un par de cosenotransformaciones de Fourier. Por lo tanto, valgámonos de las fórmulas (9) y (10). Utilizando el resultado del problema 4.28 del cap. 8, obtendremos

$$\mathfrak{F}_c\{e^{-\alpha t^2}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} \cos \omega t\, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

y

$$e^{-\alpha t^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \cos \omega t\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \cos \omega t\, d\omega. \blacktriangleright$$

Hállense las transformaciones de Fourier en forma compleja para las funciones:

7.19. $f(t) = \operatorname{sing}(t - a) - \operatorname{sing}(t - b)$, $b > a$.

7.20. $f(t) = \begin{cases} h\left(1 - \dfrac{|t|}{a}\right) & \text{para } |t| < a, \\ 0 & \text{para } |t| > a. \end{cases}$

7.21. $f(t)=\begin{cases}\cos at & \text{para } |t|<\pi/a,\\ 0 & \text{para } |t|>\pi/a.\end{cases}$ $a>0$,

7.22. $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sign} t & \text{para } |t|<1,\\ 0 & \text{para } |t|<1.\end{cases}$

Hállese el par de coseno-transformación o seno-transformación de Fourier de las funciones indicadas:

7.23*. $f(t)=\dfrac{1}{a^2+t^2}$, $a>0$.

7.24*. $f(t)=\dfrac{t}{a^2+t^2}$, $a>0$.

7.25. $f(t)=te^{-t^2}$.

7.26. $f(t)=e^{-\alpha|t|}\cos\beta t$, $\alpha>0$.

7.27. Demuéstrese que la transformación (6) es una función continua, además $\lim\limits_{\nu\to\pm\infty}\widehat{f}(\nu)=0$.

4. Características espectrales de la serie y de la integral de Fourier. Se llama *función espectral* $S(\nu_k)$ de la serie de Fourier o *densidad espectral*, la relación entre el coeficiente de Fourier de la función $f(x)$ de período l

$$c_k=c(\nu_k)=\frac{1}{l}\int\limits_{-l/2}^{l/2}f(u)\,e^{-2\pi i\nu_k u}\,du,$$

$\nu_k=\dfrac{k}{l}$, $k\in\mathbb{Z}$, y el incremento de la frecuencia $\Delta\nu_k=\dfrac{k+1}{l}-\dfrac{k}{l}=$ $=\dfrac{1}{l}$, es decir,

$$S(\nu_k)=\frac{c(\nu_k)}{\Delta\nu_k}=\int\limits_{-l/2}^{l/2}f(u)\,e^{-2\pi i\nu_k u}\,du.$$

Llamamos *espectro de amplitud* $\rho(\nu_k)$ al módulo de la función espectral y *espectro de fase* $\Phi(\nu_k)$, al argumento de la función espectral tomado con el signo inverso, es decir,

$$\rho(\nu_k)=|S(\nu_k)|=l\,|c(\nu_k)|$$

y

$$\Phi(\nu_k)=-\arg S(\nu_k).$$

En las gráficas de $\rho(\nu_k)$ y $\Phi(\nu_k)$ por lo común se construyen sólo las ordenadas ρ y Φ en los puntos ν_k y el espectro se llama reglado.

EJEMPLO 5. Hállese la función espectral de la serie de Fourier y constrúyanse los espectros de amplitud y de fase para la función

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ para } x\in(-2,\ -1), \\ 1 \text{ para } x\in(-1,\ 1), \\ 0 \text{ para } x\in(1,\ 2), \end{cases} \qquad f(x+4)=f(x).$$

◀ Tenemos $\nu_k=k/4$ y

$$S(\nu_k)=\int_{-2}^{2} f(x)\,e^{-2\pi i\nu_k x}\,dx=\int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-2\pi i\nu_k x}\,dx=$$

$$=\frac{e^{-2\pi i\nu_k x}}{-2\pi i\nu_k}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi\nu_k}\,\frac{e^{2\pi i\nu_k}-e^{-2\pi i\nu_k}}{2i}=\frac{\operatorname{sen} 2\pi\nu_k}{\pi\nu_k}.$$

Por consiguiente,

$$\rho(\nu_k)=|S(\nu_k)|=\frac{|\operatorname{sen} 2\pi\nu_k|}{\pi|\nu_k|},$$

$$\Phi(\nu_k)=-\arg S(\nu_k)=\begin{cases} 0, \text{ si } \operatorname{sen} 2\pi\nu_k\geqslant 0, \\ -\pi, \text{ si } \operatorname{sen} 2\pi\nu_k<0. \end{cases}$$

Las gráficas $\rho(\nu_k)$ y $\Phi(\nu_k)$ están representadas en la fig. 102. ▶

Llamamos *función espectral* de la integral de Fourier la transformación directa de Fourier

$$S(\nu)=\hat{f}(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-2\pi i\nu t}\,dt. \tag{11}$$

La magnitud $\rho(\nu)=|S(\nu)|$ lleva el nombre de *espéctro de amplitud* y la magnitud $\Phi(\nu)=-\arg S(\nu)$, *espectro de fase.*

Hállense las funciones espectrales $S(\nu_k)$ ó $S(\nu)$ y constrúyanse los espectros de amplitud y de fase de las funciones siguientes:

7.28. $f(t)=\begin{cases} 0 \text{ para } t\in(-2T,\ -T), \\ -1 \text{ para } t\in(-T,\ 0), \\ 1 \text{ para } t\in(0,\ T), \\ 0 \text{ para } t\in(T,\ 2T), \end{cases} \quad f(t+4T)=f(t).$

7.29. $f(t)=\begin{cases} 2 \text{ para } t\in(0,\ 1), \\ 0 \text{ para } t\in(1,\ 3), \end{cases} \quad f(t+3)=f(t).$

7.30. $f(t)=\begin{cases} 1 \text{ para } |t|<a, \\ 0 \text{ para } |t|>a, \end{cases} \quad a>0.$

7.31*. $f(t)=\begin{cases}\cos \pi t & \text{para } |t|\leqslant 1/2,\\ 0 & \text{para } |t|>1/2.\end{cases}$

7.32. $f(t)=\begin{cases}1+t & \text{para } t\in(-1,\ 0),\\ 1-t & \text{para } t\in(0,\ 1),\\ 0 & \text{para } |t|>1.\end{cases}$

7.33. $f(t)=\begin{cases}2 & \text{para } t\in(0,\ 2),\\ 0 & \text{para } t\in(-\infty,\ 0)\cup(2,\ +\infty).\end{cases}$

5. Transformación discreta de Fourier (TDF). El cálculo analítico de la transformación de Fourier (de la función espectral) (11) y de la transformación inversa (5) provoca como regla, grandes dificultades. Están elaborados los métodos de su realización numérica. Uno de estos métodos es la así llamada *transformación discreta de Fourier*:

$$\widetilde{S}(\nu_n)=y_n=\frac{T}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1}\times$$

$$\times f(t_k)\,e^{-i\frac{\pi kn}{N}},\quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ 2N-1, \tag{12}$$

donde $t_k=k\dfrac{T}{2N}$ (T es longitud del intervalo prefijado) y $\nu_n=n\dfrac{1}{T}$. La transformación inversa a (12) tiene la forma

$$f(t_k)=x_k=\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{2N-1}y_n e^{i\frac{\pi kn}{N}},$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2N-1. \tag{13}$$

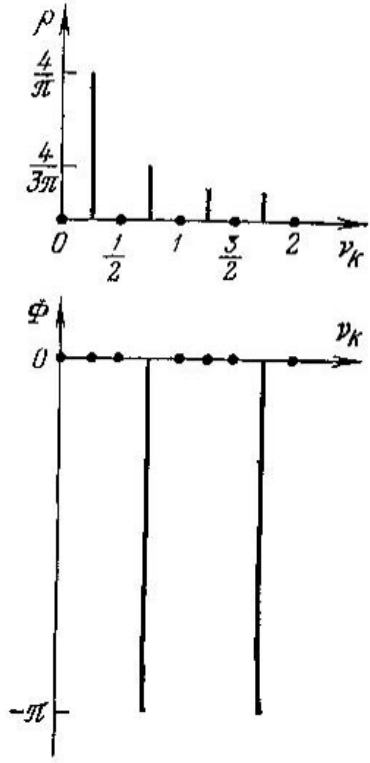


Fig. 102

Las transformaciones (12) y (13) se realizan con ayuda de los así llamados *algoritmos rápidos* (TAR), que consisten en que, si $2N=r_1r_2\ldots r_n$, r_ν son enteros $\geqslant 2$, entonces la matriz de la transfor-

macion (12) (ó (13))

$$W = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & q^2 & \dots & q^{2N-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & \dots & q^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q^{2N-1} & q^{2(2N-1)} & \dots & q^{(2N-1)^2} \end{Vmatrix},$$

donde $q = e^{-i\frac{\pi}{N}}$ ($q = e^{i\frac{\pi}{N}}$ para (13)), se representa en forma del producto de n matrices cuadradas W_ν de orden $2N$,

$$W = W_n W_{n-1} \dots W_2 W_1, \tag{14}$$

cada una de las cuales tiene $r_\nu \cdot 2N$ elementos distintos de cero. La multiplicación de la matriz W_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) por el vector columna $Z = (z_0, z_1, \dots, z_{2N-1})^\top$ eliminando la multiplicación por ceros, puede ser realizada mediante $r_\nu \cdot 2N$ operaciones de la multiplicación compleja por los factores q^k y mediante la sumación. Toda la transformación discreta de Fourier se calcula, entonces, por $(r_1 + r_2 + \dots + r_n)\, 2N$ operaciones de este tipo y por la multiplicación del resultado final por el factor $T/2N$.

Si $2N = 2^n$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n = 2$), en calidad de matriz $W_m = (c_{k,j}^{(m)})$, $k, j = 1, 2, \dots, 2^n$, se puede tomar para el desarrollo (14) la matriz, cuyos elementos se expresan del modo siguiente ($q = e^{-i\frac{\pi}{2^{n-1}}}$): sea $\nu = 0, 1, \dots, 2^{n-m} - 1$ y $\mu = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$, entonces

$$c^{(m)}_{\nu \cdot 2^m + \mu,\ \nu \cdot 2^{m-1} + \mu} = c^{(m)}_{\nu \cdot 2^m + 2^{m-1} + \mu,\ \nu \cdot 2^{m-1} + \mu} = 1,$$

$$c^{(m)}_{\nu \cdot 2^m + \mu,\ 2^{n-1} + \nu \cdot 2^{m-1} + \mu} =$$

$$= -c^{(m)}_{\nu\, 2^m + 2^{m-1} + \mu,\ 2^{n-1} + \nu \cdot 2^{m-1} + \mu} = q^{(\mu-1)2^{n-m}}, \tag{15}$$

$c^{(m)}_{k,j} = 0$ para los pares restantes (k, j).

7.34. Escríbanse las matrices W_1, W_2 y W_3 correspondientes a las fórmulas (15) para $2N = 2^3 = 8$.

7.35. Sea $X = (x_0, x_1, \dots, x_7)^\top$. Fórmense los productos $Z^{(1)} = W_1 X$, $Z^{(2)} = W_2 Z^{(1)} = W_2 (W_1 X)$ y $Z^{(3)} = W_3 Z^{(2)} = W_3 (W_2 W_1 X)$. Compárese el resultado obtenido con el producto WX.

Para la sucesión finita de los números complejos $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$, TDF según la fórmula (12) se puede representar en la forma

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \qquad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

y TDF inversa (TDFI) en la forma

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{2\pi i n k}{N}} \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Designemos brevemente TDF y TDFI, respectivamente,

$$Y = \mathfrak{F}[X] \quad \text{y} \quad X = \mathfrak{F}^{-1}[Y],$$

donde $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})^\top$, $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})^\top$.

7.36. Fórmese en Fortran el subprograma para calcular las transformaciones de Fourier directa e inversa valiéndose el algoritmo rápido. Los parámetros son: N, N1, KIND, A, B, AA, BB, donde N1 es el número de elementos de la sucesión inicial (y de la transformación), N es el exponente de la potencia en la igualdad $N1 = 2^N$, KIND es el cero ó el 1 (cero cuando se calcula TDF y 1 cuando se calcula TDFI), A y B son tablas de entrada de dimensión N1 para las partes real e imaginaria de la sucesión inicial, AA y BB son tablas de salida de dimensión N1 para las partes real e imaginaria de la transformación obtenida.

En los problemas 7.37—7.41 fórmese en Fortran el subprograma para obtener la sucesión compleja $(x_1, x_2, \ldots, x_{128})$, poniendo $x_k = x(t_k) + i \cdot 0$ para las funciones indicadas $x = x(t)$, $t \in [1, 128]$, $t_k = k = 1, 2, \ldots, 128$. Los parámetros son A, B, donde A y B son tablas de 128 elementos para las partes real e imaginaria de la sucesión.

7.37. $x = 25$. **7.38.** $x = \begin{cases} 0, & t \in [1, 32] \cup [97, 128], \\ 20, & t \in [33, 96]. \end{cases}$

7.39. $x = \frac{1}{32} t (128 - t)$.

7.40. $x = \begin{cases} t, & t \in [1, 64], \\ 128 - t, & t \in [65, 128]. \end{cases}$

7.41. $x = t$.

7.42. Empleando los subprogramas obtenidos en la resolución de los problemas 7.36 y 7.37—7.41 para una de las sucesiones $(x_1, x_2, \ldots, x_{128})$, fórmese en Fortran el programa de las transformaciones siguientes:

a) hállese $Y = \mathfrak{F}[X]$;

b) para $m = 24, 32, 40$ de la sucesión $(y_n \mid n = 1, \ldots, 128)$ obténgase la sucesión $(\tilde{y}_n \mid n = 1, \ldots, 128)$,

cuyos elementos se determinan por las igualdades

$$\widetilde{y}_n = \begin{cases} y_n, & n = 1, 2, \ldots, 64 - m, \ 65 + m, \ldots, 128, \\ 0, & n = 64 - m + 1, \ldots, 65 + m - 1; \end{cases}$$

c) hállese $\widetilde{X} = \widetilde{\mathfrak{A}}^{-1}[\widetilde{Y}]$;

d) compárense las sucesiones (x_k) y $(\widetilde{x}_k)$ hallando sus diferencias.

RESPUESTAS

1.1. $\frac{1}{4}$. 1.2. $\frac{1}{2}$. 1.3. $\frac{3}{2}\frac{6e - e^2 - 1}{(3e-1)(3-e)}$. ● Empléese la fórmula de Euler $\cos in = \frac{e^{-n} + e^n}{2}$. 1.4. $1 + i$. 1.17. Diverge. 1.18. Converge. 1.19. Converge. 1.20. Converge. 1.21. Diverge. 1.22. Diverge. 1.23. Converge. 1.24. Diverge. 1.25. Converge. 1.26. Converge. 1.27. Converge absolutamente. 1.28. Converge. 1.29. Diverge. 1.30. Converge. 1.31. Converge absolutamente. 1.32. Converge. 1.33. Diverge. 1.34. Diverge. 1.35. Converge. 1.36. Converge. 1.37. Converge. 1.38. Diverge. 1.39. Converge. 1.40. Converge. 1.41. Converge. 1.42. Converge. 1.43. Converge. 1.44. Converge. 1.45. Converge. 1.46. Converge. 1.47. Converge. 1.48. Diverge. 1.49. Diverge. 1.50. Diverge. ● $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. 1.51. Converge. 1.52. Converge. 1.53. Diverge. 1.54. Converge. 1.55. Diverge. 1.56. Diverge. 1.57. Converge. 1.58. Converge. 1.59. Converge. 1.60. Diverge. 1.61. Diverge. 1.62. Converge absolutamente. 1.63. Diverge. 1.64. Converge absolutamente. 1.65. Si $p > 1$, la serie converge para todo α; si $p < 1$, diverge. Si $p = 1$, la serie converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha \leqslant 1$. 1.66. Si $p > 1$, la serie converge para cualesquiera α y β; si $p < 1$, diverge. Si $p = 1$, la serie converge para $\alpha > 1$ y cualesquiera β y diverge para $\alpha < 1$. Si es que $p = \alpha = 1$, la serie converge para $\beta > 1$ y diverge para $\beta \leqslant 1$. 1.68. Converge condicionalmente. 1.69. Converge absolutamente. 1.70. Diverge. 1.71. Converge absolutamente. 1.72. Diverge. 1.73. Converge condicionalmente. 1.74. Converge absolutamente. 1.75. Converge absolutamente. 1.76. Converge condicionalmente. 1.77. Converge absolutamente. 1.78. Converge condicionalmente. ● Analícense las sumas parciales con los números $8n$, en las que hay que agrupar los términos con los números $8k + 1$ y $8k + 5$, $8k + 2$ y $8k + 6$, $8k + 3$ y $8k + 7$. Cerciórese de que existe el límite $\lim_{n\to\infty} S_{8n}$. Luego, así como al demostrar el criterio de Leibniz, válganse de la correlación $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{4} = 0$. 1.79. Converge condicionalmente. 1.80. Diverge. ● Analícense las sumas parciales con números pares. 1.81. Converge condicionalmente. 1.82. Converge absolutamente. 1.83. Diverge.

1.84. ● Válganse de la desigualdad $|a \cdot b| \leqslant \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$.

1.85. Converge. ◀ Estimemos c_n. Tenemos $c_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{2^{n-k+1}} +$

$$+ \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \frac{1}{k^2 \cdot 2^{n-k+1}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \left(2^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} 2^k \right) \leqslant$$

$\leqslant \frac{A_1}{2^{\frac{n}{2}}} + \frac{A_2}{n^2}$. Los sumandos obtenidos son términos de las series convergentes $A_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}}$ y $A_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. ▶ 1.86. Converge. ● Para estimar $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k+1}}{k^2(n-k+1)}$ aplíquese el desarrollo de la fracción en simples $\frac{1}{k^2(n-k+1)} = \frac{1}{(n+1)k^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k}\right)$ y muéstrese que los números $b_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ decrecen monótonamente respecto a la magnitud absoluta. 1.87. Diverge. ● Aprovéchese el desarrollo de la fracción en simples, obtenido en el problema anterior, y estímense los términos $d_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ por abajo. 1.88. Diverge. ● $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k(n-k+1)} > \frac{1}{n}$ para $n \geqslant 2$.

2.1. $(0, +\infty)$; converge absolutamente para $x \in (1, +\infty)$. 2.2. $\mathbb{R}$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.3. Diverge en todos los puntos. 2.4. $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.5. $(-\infty, -1)$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.6. $(-1, -1/2] \cup (1/2, 1)$; converge absolutamente para $x \in (-1, -1/2) \cup (1/2, 1)$. 2.7. $[0, +\infty) \cup \{k\pi \mid k = -1, -2, \ldots\}$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.8. $(-2, 2)$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.9. $(0, +\infty)$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.10. $[1/e, e)$; converge

absolutamente para $x \in (1/e,\ e)$. **2.11.** $|z-2|>1$. **2.12.** $|z+1|>1$. **2.13.** $|z-3i|>\sqrt{2}$. **2.14.** El semiplano $\operatorname{Re} z>0$. **2.15.** $\{z\,|\,-\pi/4<\arg z<\pi/4$ y $3\pi/4<\arg z<5\pi/4\}$. **2.16.** $\operatorname{Re} z<0$. **2.17.** $\operatorname{Re} z>1$. ● Compárese la expresión $|(-1)^n n^{-z}|$ con el término n^{-p} de la serie de Dirichlet. **2.18.** $\operatorname{Im} z>0$. ● Aprovéchese el hecho de que la función lineal fraccional $w=e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ aplica el semiplano superior en el interior del círculo unitario. **2.19.** $|z|>1$. ● Para $|a|>1$ la función $w=e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ aplica el exterior del círculo unitario ($|z|>1$) en el interior ($|w|<1$). **2.20.** $|z/(1-z)|<1$, es decir, $\operatorname{Re} z<1/2$. ● Véase el problema 3.53. del cap. 11. **2.21.** Converge para $x\in(0,+\infty)$, converge uniformemente si $x\in[\alpha,+\infty)$ para cualquier $\alpha>0$. **2.22.** Converge para $x\in(-\infty,-3)\cup[-1,+\infty)$, converge uniformemente si $x\in(-\infty,-3-\delta]\cup[-1,+\infty)$ para todo $\delta>0$. **2.23.** Converge uniformemente en todo el eje. **2.24.** Converge en todo el eje, excepto en los puntos $x=-1,-2,\ldots$. Converge uniformemente en el conjunto obtenido del eje, después de la eliminación de los intervalos $(-\delta_k-k,\ -k+\delta_k')$, $k=1,2,\ldots$, donde δ_k y δ_k' son tan pequeños como se quiera. **2.25.** $\operatorname{Re} z\leqslant 0$; la convergencia uniforme en todos los puntos. **2.26.** $|z-1|\leqslant 1$; la convergencia es uniforme en todos los puntos. **2.27.** Converge para $\operatorname{Re} z>1$, converge uniformemente para $\operatorname{Re} z\geqslant\alpha>1$. **2.28.** Converge fuera del círculo $|z+2|>1$, converge uniformemente fuera de cualquier círculo $|z+2|\geqslant\alpha>1$.

2.29. ● Calcúlese $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{k^2}{(1+x^2)^k}$ y muéstrese que $\lim\limits_{x\to 0}R_n(x)=1\neq R_n(0)=0$. **2.32.** La serie converge en la región que consta del interior del círculo unitario $|z|<1$, del punto $z=1$ y del exterior del círculo unitario $|z|>1$; la serie converge uniformemente en la unión del círculo cerrado $|z|\leqslant 1-\gamma$ y del exterior cerrado del círculo $|z|\geqslant 1+\delta$ para cualesquiera $\gamma,\delta>0$. La suma de la serie

$$S(z)=\begin{cases}1/2 \text{ para } |z|>1,\\ -1/2 \text{ para } |z|<1,\\ 0 \text{ para } z=1.\end{cases}$$

2.36. ● Empléese la afirmación del problema 2.35.

3.1. Si la serie potencial (1) converge en el punto $z=z_1\neq z_0$, entonces converge absolutamente en el círculo $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ y converge uniformemente en todo círculo cerrado $|z-z_0|\leqslant r<|z_1-z_0|$. Si la serie (1) diverge en el punto $z=z_2$, diverge también fuera del círculo $|z-z_0|>|z_2-z_0|$. **3.2.** ● Para demostrar las afirmaciones a) y b) aplíquense el teorema de Abel y el teorema de Weierstrass, y para demostrar la afirmación c), el teorema de Abel, con la afirmación del problema 2.35, tomando en consideración que

$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n+1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$. 3.3. ● Aprovéchese la afirmación b) del problema 3.2. 3.4. Converge absoluta y uniformemente en la región $|z-1| \leqslant 2$. 3.5. Converge absoluta y uniformemente en la región $|z+1| \leqslant 2$. 3.6. Converge absolutamente si $|z+2| < 1$; converge uniformemente si $|z+2| \leqslant r < 1$. En los puntos $x = -3$ y $x = -1$ converge condicionalmente. En el segmento $-3 \leqslant x \leqslant -1$ converge uniformemente. 3.7. Converge absolutamente en la región $|z-4| < 1/2$; converge uniformemente en la región $|z-4| \leqslant r < 1/2$. En el punto $x = 9/2$ converge condicionalmente, en el punto $7/2$ diverge. En cualquier segmento $7/2 < l \leqslant x \leqslant 9/2$ converge uniformemente. 3.8. Converge absolutamente en la región $|z-2| \leqslant 1/\sqrt{2}$; converge uniformemente en la región $|z-2| \leqslant r < 1/\sqrt{2}$. En los puntos $2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ diverge. 3.9. Converge absolutamente en la región $|z-3| < \sqrt{3}$; converge uniformemente en la región $|z-3| \leqslant r < \sqrt{3}$. En los puntos $x = 3 \pm \sqrt{3}$ converge condicionalmente y en el segmento $3-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 3+\sqrt{3}$. uniformemente. 3.10. Converge absolutamente en la región $|z| < 1$. Converge uniformemente en la región $|z| \leqslant r < 1$; diverge en la circunferencia $|z| = 1$. 3.11. Converge absolutamente en la región $|z| < 1$; converge uniformemente en la región $|z| \leqslant \sqrt{r} < 1$ diverge en la circunferencia $|z| = 1$. 3.12. Converge absolutamente en todo el plano y uniformemente en cualquier región limitada. 3.13. Converge absolutamente en la región $|z-1| < 8$; converge uniformemente en la región $|z-1| \leqslant r < 8$; en los puntos $x = -7$ y $x = 9$ diverge. 3.14. Diverge en todos los puntos, excepto el punto $z_0 = i$. 3.15. Converge absolutamente en la región $|z-3| < \sqrt{3}$; converge uniformemente en la región $|z-3| \leqslant r < \sqrt{3}$ En los puntos $x = 3 \pm \sqrt{3}$ diverge. Converge uniformemente en cualquier segmento $3-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant r < 3+\sqrt{3}$. 3.16. Converge absolutamente en todo el plano y uniformemente en cualquier región limitada. 3.17. Converge absolutamente en la región $|z-1| < 1$; converge uniformemente en la región $|z-1| \leqslant r < 1$; en la circunferencia $|z-1| = 1$ diverge. 3.18. Converge absolutamente en la región $|z-3| < 4$; converge uniformemente en la región $|z-3| \leqslant r < 4$; en el punto $x = 7$ converge condicionalmente, en el punto $x = -1$ diverge. En cualquier segmento $-1 < l \leqslant x \leqslant 7$ converge uniformemente. 3.19. Converge absolutamente en todo en plano, converge uniformemente en toda región limitada. 3.20. Converge absolutamente en la región $|z| < 2$; converge uniformemente en la región $|z| \leqslant r < 2$. En el punto $x = -2$ diverge, en el pnto $x = 2$ converge condicionalmente. En todo segmento $-2 < l \leqslant x \leqslant 2$ converge uniformemente. 3.21. Converge absoluta y uniformemente en la región $|z| \leqslant 2$. 3.22. Converge absolutamente en la región $|z-1| < 9/4$; converge uniformemente en la región $|z-1| \leqslant r < 9/4$; en los puntos $x = -5/4$ y $x = 13/4$ diverge. 3.23. Converge absolutamente en la región $|z| < 1/e$; converge uniformemente en la región $|z| \leqslant r < 1/e$; en los puntos $x = \pm 1/e$ diverge. 3.24. Converge absoluta y uniforme

mente en la región $|z-3| \leqslant 1/\sqrt{2}$. 3.25. Converge absoluta y uniformemente en la región $|z+3| \leqslant 1$. 3.26. Converge absoluta y uniformemente en la región $|z-3| \leqslant \sqrt{2}$. 3.27. Converge absolutamente en la región $|z+3|<1$; converge uniformemente en la región $|z+3| \leqslant r<1$; en los puntos $x=-2$ y $x=-4$ diverge. 3.28. Converge absolutamente en la región $|z|<1$; converge uniformemente en la región $|z| \leqslant r<1$; diverge en la circunferencia $|z|=1$. 3.29. Converge sólo en el punto $z=5$. 3.30. Converge absoluta y uniformemente en la región $|z| \leqslant 1$. 3.31. Converge absolutamente en la región $|z|<1/2$; converge uniformemente en la región $|z| \leqslant r<1/2$; diverge en la circunferencia $|z|=1/2$. 3.32. Converge absoluta y uniformemente en la región $|z-2| \leqslant 1$.

3.37. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z \ln 2)^n$, $|z|<\infty$. 3.38. $\frac{\sqrt{2}}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1} \frac{z^n}{n!}$, $|z|<\infty$. 3.39. $1+\frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$. 3.40. $z+\frac{2}{3!} z^3+ +\frac{16}{5!} z^5+\ldots$ $|z|<\frac{\pi}{2}$. ● El radio de convergencia de esta serie se determina aplicando el corolario del teorema de Taylor. 3.41. $1+ +\frac{z^2}{2!}+\frac{5}{4!} z^4+\ldots$, $|z|<\frac{\pi}{2}$. 3.42. $z-\frac{2}{3!} z^3+\frac{16}{5!} z^5+\ldots$, $|z|< <\frac{\pi}{2}$. 3.43. $1+z-\frac{2}{3!} z^3-\frac{4}{4!} z^4+\ldots$, $|z|<\infty$. 3.44. $1-z^2+ +\frac{z^4}{2!}-\ldots+(-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}+\ldots$, $|z|<\infty$. 3.45. $\frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$. 3.46. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{4^{n+1}}$, $|z|<2$. 3.47. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n z^{n+1}}{3^{n+1}}$, $|z|<\frac{3}{4}$. 3.48. $3-\frac{z}{27}-\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-4)}{n!\, 3^{3n-1}} z^n$, $|z|<27$. 3.49. $\frac{1}{3}\left(1-\frac{z^2}{18}+\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 18^2} z^4+\ldots+(-1)^n \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{n!\, 18^n} z^{2n}+\ldots\right)$, $|z|<3$. 3.50. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{7n+1}{2^{n+2}} z^n$, $|z|<2$. ● $\frac{3z+1}{(z-2)^2}=-(3z+1) \times \times\left(\frac{1}{z-2}\right)'$. 3.51. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n 2^{n+1}) z^n$, $|z|<\frac{1}{2}$.

3.52. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-1}(n+2)}{n!} z^n$, $|z| < \infty$. **3.53.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z| < \infty$.

3.54. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $|z| < \infty$. **3.55.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times$

$\times \frac{2^{4n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $|z| < \infty$. **3.56.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n} z^n$, $|z| < \frac{1}{2}$;

cuando $x = \frac{1}{2}$ converge condicionalmente. **3.57.** $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \times$

$\times (1+2^{-n}) \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$; para $x = 1$ converge condicionalmente.

3.58. $z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$; si $x = \pm 1$ converge

absolutamente. **3.59.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$; para $x = \pm 1$ con-

verge condicionalmente. **3.60.** $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$,

cuando $x = \pm 1$ converge absolutamente. **3.61.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)}$,

$|z| < \infty$. **3.62.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+2}}{2(2n+1)!(2n+1)}$, $|z| < \infty$.

3.63. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n \cdot z^{2n-1}}{(2n+1)!}$, $|z| < \infty$. ● $\frac{z \cos z - \operatorname{sen} z}{z^2} = \left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)'$.

3.64. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1) z^{2n-2}}{(2n)!}$, $|z| < \infty$. ● $\frac{z \operatorname{sen} z - 1 + \cos z}{z^2} =$

$= \left(\frac{1-\cos z}{z}\right)'$. **3.65.** $-78 + 59(z+4) - 14(z+4)^2 + (z+4)^3$.

3.66. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-2)^n$, $|z-2| < 1$. **3.67.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3i)^n}{(1-3i)^{n+1}}$,

$|z-3i|<|1-3i|=\sqrt{10}$. **3.68.** $-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-3)^{2k}}{4^{k+1}}$, $|z-3|<2$.

3.69. $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1}-3^{-n-1})(z+4)^n$, $|z+4|<2$. **3.70.** $1+\frac{1}{3}(z-1)+$

$+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 5\ \ldots\ (3n-4)}{3^n n!}(z-1)^n$, $|z-1|<1$.

3.71. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(z-2)^{n-1}}{2^{n+1}}$, $|z-2|<2$. ● $\frac{1}{z^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}\right)'$.

3.72. $e^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{2n}}{n!}$, $|z|<\infty$. **3.73.** $e\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}((z-1)^{2n}+$

$+(z-1)^{2n+1})$ $|z|<\infty$. **3.74.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{\operatorname{sen}4}{(2n)!}(z+2)^{2n}+\right.$

$\left.+\frac{\cos 4}{(2n+1)!}(z+2)^{2n+2}\right)$, $|z|<\infty$. **3.75.** $3\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$

$\times\frac{5^n(z-1)^n}{n\cdot 8^n}$, $|z-1|<\frac{8}{5}$. ● $\ln(5z+3)=\ln 8+\ln\left(1+\frac{5}{8}(z-1)\right.$.

3.76. $\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z+3)^{2n}}{n\cdot 4^n}$, $|z+3|<2$. **3.77.** $|z|<1$;

$\frac{2}{(1+z)^3}$. **3.78.** $|z+1|<1$; $\frac{z+1}{z^2}$. **3.79.** $|z-3|<1$; $-\frac{\ln(4-z)}{z-3}$

para $z\neq 3$, 0 para $z=3$. **3.80.** $|z|<|a|$; $\frac{1}{a^2+z^2}$. **3.81.** $|z|<1$;

$\frac{1}{(1+z^2)^2}$. **3.83.** ● Representando $f(z)$ en la forma de serie, según las potencias $(z-a)$, es decir, en forma de $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$, de la continuidad de $f(z)$ en el punto $z=a$, convénzase de que $c_0=0$. Esto significa que $f(z)=(z-a)\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-a)^{n-1}=(z-a)f_1(z)$ donde $f_1(z)$ es una función analítica en el círculo $|z-a|<R$ y $f_1(z_k)=0$, $k=1, 2, \ldots$ De aquí concluyanse que $c_1=0$, etc. **3.84.** No. **3.85.** a) $f(z)=z/(z+2)$; b) $f(z)=z^2$. **3.86.** $g(z)=f(z)=1/(2-z)$ en la

parte común de los círculos $|z|<2$ y $|z-i|<\sqrt{5}$. **3.87.** $g(z)=f(z)=\ln(1+z)$ en la parte común de los círculos $|z|<1$ y $|z-1-2i|<2\sqrt{2}$.

4.1. 10 000 para $x=1$ ó 10 para $x=0{,}5$. **4.2.** Dos términos, el error absoluto límite $r<\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4=0{,}0000386<0{,}0001$. **4.3.** 0,0002. **4.4.** $|x|<0{,}9067$. **4.5.** 0,002. **4.6.** 1,6487. **4.7.** 0,3679. **4.8.** 0,5878. **4.9.** 0,2094. **4.10.** 0,5403. **4.11.** 0,8269. ● Teniendo en cuenta que $1000=318\times 3{,}1415926+1{,}5707963-0{,}5971963$, reducimos el argumento a la magnitud $0{,}5971963\in[0,\pi/4]$ y hallamos que $\operatorname{sen}\ 1000=\operatorname{sen}(1{,}15707963-0{,}5971963)=\cos 0{,}5971963$. **4.12.** 8,0411.

● $\sqrt[3]{520}=(512+8)^{1/3}=8\left(1+\frac{1}{64}\right)^{1/3}$. **4.13.** 3,8730. ● $\sqrt{15}=\sqrt{16-1}=4\left(1-\frac{1}{16}\right)^{1/2}$. **4.14.** 5,1437. ● $\sqrt[4]{700}=(625+75)^{1/4}=5\left(1+\frac{3}{25}\right)^{1/4}$. **4.15.** 0,6931. Utilícese el desarrollo $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ para $x=\frac{1}{3}$. **4.16.** 0,5236. **4.17.** 0,9385. **4.18.** 1,1752. **4.19.** 1,1276.

4.20.

```
      FUNCTION S(Y,EPS)
      PI = 3.141593
      PI2 = 1.570796
      X = Y
      FACT = 1.
      SX = 1.
      IF(X.LT.0) SX = -1.
      X = ABS(X)
      IF(X.LE.PI) GO TO 1
      X1 = X/PI
      N = X1
      N1 = N/2
      M = N - N1*2
      IF (M.NE.0) FACT = -1.
      X11 = N
      X = X - X11*PI
    1 IF (X.GT.PI2) X = PI - X
      S = 0
```

```
      SM = X
      T = -1.
    2 T = T + 1.
      A = 2*T
      A = (A + 2.)*(A + 3.)
      S = S + SM
      S = S*(-1.)*(X*X)/A
      IF(ABS(SM).GT.EPS) GO TO 2
      S = (S + SM)*SX*FACT
      RETURN
      END
```

● Ya que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sign}(x) \cdot \operatorname{sen} |x|$, se puede considerar que $x \geqslant 0$. Sea $x = \pi n + x_1$, donde $n = \left[\frac{x}{\pi}\right]$ y $x_1 \in [0, \pi)$, entonces $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi n + x_1) = \cos \pi n \operatorname{sen} x_1 = (-1)^n \operatorname{sen} x_1$. En este caso, si $x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, suponemos que $\operatorname{sen} x = (-1)^n \operatorname{sen}(\pi - x_1) = (-1)^n \times \operatorname{sen} x_2$, donde $x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4.21.
```
      FUNCTION C(X,EPS)
      PI2 = 6.283185
      Y = X
      IF(ABS(X).LE.PI2) GO TO 1
      N = Y/PI2
      A = N
      FACT = 1.
      IF(X.LT.0) FACT = -1.
      Y = Y - FACT*PI2*A
    1 Y = Y + 1.570796
      C = S(Y,EPS)
      RETURN
      END
```

4.22.
```
      FUNCTION E(Y,EPS)
      REAL* 8 E1/2.7182818284590/,E2/0,3678794411714/,E3,E4
      X = Y
      IX = X
      X1 = IX
```

```
      X = X - X1
      E4 = 1.
      E = 1.
      B = ABS(X)
      JX = IABS(IX)
      IF(JX.LT.1) GO TO 3
      E3 = E1
      IF(IX.LT.0) E3 = E2
      DO 1 I = 1, JX
    1 E4 = E4*E3.
    3 EM = 1.
      T = 0.
    2 T = T + 1.
      EM = EM*X/T
      E = E + EM
      EPSI = ABS(EM)*B/T
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 2
      EM = EM4
      E = E*EM
      RETURN
      END
```

La estimación del resto es

$$| R_n(x) | < \frac{| x |^{n+1}}{n! n} .$$

El número $e^x = e^{[x]} \cdot e^{x_1}$, $| x_1 | < 1$, donde $e^{[x]} = \underbrace{e \cdot e \ldots e}_{[x] \text{ veces}}$ para $[x] \geqslant 0$, $e^{[x]} = \dfrac{1}{\underbrace{e \cdot e \ldots e}_{[x] \text{ veces}}}$ para $[x] < 0$.

4.23.

```
      FUNCTION BINOM (X,ALFA,EPS)
      IF(X.GT.1) GO TO 2
      BINOM = 1.
      B = 1
      T = 0.
```

```
    1 A = ALFA - T
      T = T + 1
      B = B*A*X/T
      BINOM = BINOM + B
      IF(B.GT.1) GO TO 1
      EPS1 = ABS(B)/(1=ABS(A)   ABS(X)/T)
      IF(EPS1.GT EPS) GO TO 1
      RETURN
    2 WRITE (3,3)
    3 FORMAT ('X.GT.1 ')
      RETURN
      END
```

● La estimacion del resto es $|R_n(x)| \leqslant \left|\binom{\alpha}{n} x^n\right| \times$

$$\times \frac{1}{1-\frac{|\alpha-n+1\downarrow|}{n}|x|}.$$

4.24.

```
      FUNCTION ALN(X,EPS)
      T = 0.
      ALN = 0.
      A = -1.
    1 T = T + 1
      A = (-1.)*X*A
      ALN = ALN + A/T
      IF(ABS(A/T).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.25.

```
      FUNCTION ALN1(X,EPS)
      IF(X.GE.1) GO TO 2
      T = 0.
      ALN1 = X
      A = X
    1 T = T + 1.
      X2 = X**2
      A = A*X2
```

```
      T2 = T*2
      B = A/(T2 + 1.)
      ALN1 = ALN1 + B
      EPS1 = ABS(B)/(1.—X**2)
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
    2 WRITE (3.3)
    3 FORMAT (9h X.GE.1)
      RETURN
      END
```

● La estimación del resto es

$$| R_n(x) | \leqslant \frac{| x |^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}.$$

4.26.

```
      FUNCTION ARCTG(X,EPS)
      IF(X.GT.1) GO TO 2
      T = 0.
      ARCTG = X
      A = X
    1 T = T + 1.
      X2 = (—1.)*X**2
      A = A*X2
      T2 = T*2.
      ARCTG = ARCTG + A/(T2 + 1.)
      EPS1 = ABS(A**X2/(T2 + 3.))
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
    2 WRITE (3,3)
      FORMAT ('X.GT.1 ')
      RETURN
      END
```

4.27.

```
      FUNCTION B0(Y,EPS)
      X = Y/2
      B0 = 1.
```

```
      A = 1.
      T = 0.
    1 T = T + 1.
      A = A*(-1.)*(X*X)/T**2
      B0 = B0 + A
      IF(ABS(A).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.28. Uno de los dos subprogramas:

```
      FUNCTION SH(X,EPS)
      SH = (E(X,EPS) - E((-1.)*X,EPS))/2.
      RETURN
      END
      FUNCTION SH(X,EPS)
      T = 0.
      SH = 0
      A = X
    1 T = T + 1.
      T2 = T*2.
      FA = (X**2)/T2*(T2 + 1.)
      A = A*FA
      SH = SH + A
      IF(FA.GT.1) GO TO 1
      EPS1 = A*FA/(1 - FA)
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 2
      RETURN
      END
```

4.29.

```
      FUNCTION CH(X,EPS)
      CH = (E(X,EPS) + E((-1.)*X,EPS))/2.
      RETURN
      END
```

4.30. Tarea para el ordenador referente al problema 4.10:

a) subprograma

```
      FUNCTION S(X,EPS)
```

b) subprograma

```
      FUNCTION C(X,EPS)
      c) programa principal
      R = C(1.,0.0001)
      R1 = COS(1.)
      WRITE (3,1) R,R1
    1 FORMAT ( 'COS1 ', 2F8.4)
      STOP
      END
```

Tarea para el ordenador referente al problema 4.15:

```
      a) programa principal
      R1 = ALN1(0.333333, 0.0001)
      R2 = ALOG(2.)
      WRITE (3,1) R1,R2
    1 FORMAT ( 'LN(2) = ', 2F8.4)
      STOP
      END
      b) subprograma
      FUNCTION ALN1(X,EPS)
```

Tarea para el ordenador referente al programa 4.14:

```
      a) subprograma
      FUNCTION BINOM(X,EPS)
      b) programa principal
      R = BINOM(0.12,0.25,0.0001)
      R = 0,2*R
      R1 = SQRT(700.)
      R1 = SQRT(R1)
      WRITE (3.1)R,R1
      FORMAT ('700**(1/4) = ', 2F8.4)
      STOP
      END
```

4.31. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n^2}$. **4.32.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{(2n+1)!\,(4n+3)}$.

4.33. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!\,(4n+1)}$. **4.34.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!!\,x^{3n+1}}{2^n \cdot n!\,(3n+1)}$.

4.35.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{3k+2}}{2^{2k+1}(k+1)!\,k!}.$$

4.36.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

4.37. 0,2800. 4.38. 0,1991. 4.39. 0,4802. 4.40. 0,6225. 4.41. 0,7714. 4.42. 0,9461.

4.43.

```
      FUNCTION SI(X,EPS)
      SI = X
      X2 = X*X
      SM = X
      T = 0.
    1 T = T + 1.
      T2 = T*2
      SM = SM*(-1.)*X2/(T2 + 2.)*(T2 + 3.)
      A = SM/(T2 + 3.)
      SI = SI + A
      IF(ABS(A). GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.44.

```
      FUNCTION ERF(X,EPS)
      ERF = X
      X2 = X*X
      AM = X
      T = 1.
    1 T = T + 1.
      T2 = T*2.
      AM = AM*(-1.)*X2/T
      A = AM/(T2 - 1.)
      ERF = ERF + A
      IF(ABS(A).GT.EPS) GO TO 1
      ERF = 1.128379*ERF
      RETURN
      END
```

4.45.

```
      FUNCTION BINT(X,S,ALFA,EPS)
```

```
      XS = X**S
      BINT = X
      B = X
      T = 0
    1 T = T + 1
      TS = T*S + 1.
      C = XS*(ALFA + 1.—T) T
      B = B*C
      A = C/TS
      BINT = BINT + B/TS
      IF(ABS(A).GT.1) GO TO 1
      A = B/(1. — A)
      EPS1 = ABS(A)
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.46.

```
      FUNCTION ATG(X,EPS)
      X2 = (—1.)*X*X
      A = X
      ATG = X
      T = 0.
    1 T = T + 1.
      T2 = (T*2. + 1.)**2
      A = A*X2
      B = A/T2
      ATG = ATG + B.
      IF(ABS(B).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.47.

```
      FUNCTION ALIN(X,EPS)
      A = —1.
      ALIN = 0.
      T = 0.
    1 T = T + 1.
```

```
      T2 = T*T
      A = A*X*(-1.)
      B = A/T2
      ALIN = ALIN + B
      IF(ABS(B).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.48. Tarea para el ordenador referente al problema 4.39:

a) programa principal

```
      R = 0.886227*ERF(0.5,0.0001)
      WRITE (3,1) R
    1 FORMAT (' ', F8.4)
      STOP
      END
```

b) subprograma función

```
      FUNCTION ERF(X,EPS)
```

Tarea para el ordenador referente al problema 4.40:

a) programa principal

```
      R = BINT(0.6,2.,0.333333,0.0001)
      WRITE (3,1) R
    1 FORMAT (' INTEGRAL = ', F8.4)
      STOP
      END
```

b) subprograma función

```
      FUNCTION BINT(X,S,ALFA,EPS)
```

4.50. ● $\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} - \right.$ $\left. - \frac{1}{(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)}\right)$. 4.51. ● Véase el problema 4.50. 4.52. ● El desarrollo en la serie potencial de la función $\ln(1+x)$ para $x=1$. 4.53. ● El desarrollo en serie potencial de la función $\operatorname{arctg} x$ para $x=1$. 4.54. $\ln 2$. 4.55. $I_0(2)$. 4.56. $e-1$. 4.57. $\frac{1}{2}\ln 2$. 4.58. $\operatorname{sen} 1$. 4.59. $\cos\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4.60. e^2. 4.61. 1,0767. ● $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1} = \zeta(2) -$

$$-\zeta(4)+\zeta(6)-\zeta(8)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8(n^2+1)}.$$ 4.62. 1,3226. ●

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}=\pi^2\zeta(2)-\frac{\pi^4}{3}\zeta(4)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}-\frac{\pi^2}{n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^4}{n^4}\right).$$

4.63. 0,5071. ● $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2}=\zeta(3)-2\zeta(6)+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6(n^3+2)}.$$

4.64. 0,0939. ● $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(5n+3)}=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}\right)\zeta(2)-\frac{3}{25}\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\zeta(3)+\frac{9}{125}\left(1-\frac{1}{8}\right)\zeta(4)-\frac{27}{125}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4(5n+3)}.$$

4.65. 0,1249. ● $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n+2}=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{2}{9}\left(1-\frac{1}{2}\right)\zeta(2)+$$

$$+\frac{4}{27}\left(1-\frac{1}{4}\right)\zeta(3)-\frac{8}{81}\left(1-\frac{1}{8}\right)\zeta(4)+\frac{16}{81}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$$

$$\times\frac{1}{n^4(3n+2)}.$$ 4.66. El programa para el problema 4.64 (empléese la igualdad $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(an+b)}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{2}\right)\zeta(2)-\frac{b}{a^2}\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\zeta(3)+\frac{b^2}{a^3}\left(1-\frac{1}{8}\right)\zeta(4)-\frac{b^3}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4(an+b)}$$

para $a=5$, $b=3$):

```
A = 5.
B = 3.
EPS = 0.0002
S = 0.822467/A -- B*0.901543/A**2 + B**2*0.947033/A**3
D = 1.
C = 0.
T = 0.
```

```
    T = T + 1
    D = D*(-1.)
    SM = 1./(T**4)*(A*T + B)
    C = C + D*SM
    IF(SM.GT.EPS) GO TO 1
    S = S + (B**3)*C/(A**3)
    WRITE (3,2) S
2   FORMAT ( ' SUMA DE LA SERIE = ', F8.4)
    STOP
    END
```

4.67. $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1\cdot2\cdot5\cdot6\ \ldots\ (4n+1)(4n+2)}{(4n)!}x^{4n}+\right.$

$\left.+\frac{2\cdot3\cdot6\cdot7\ \ldots\ (4n+2)(4n+3)}{(4n+1)!}x^{4n+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. **4.68.** $y(x)=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1\cdot4\cdot7\ \ldots\ (3n+1))^2}{(3n+2)!}(3n+4)x^{3n+2}$, $x\in\mathbb{R}$. **4.69.** $y(x)=1+$

$+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\ \ldots$ **4.70.** $y(x)=1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+$

$+\frac{x^6}{45}+\ \ldots$ **4.71.** $y(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{5x^6}{6!}+\ \ldots$ **4.72.**

$y(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2^m\cdot m!}x^{2m}=1-e^{-x^2/2}$, $x\in\mathbb{R}$. **4.73.** $y(x)=$

$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{m-1}(m-1)!}{(2m+1)!}x^{2m+1}$, $x\in\mathbb{R}$. **4.74.** $y(x)=x+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\times$

$\times\frac{(-1)^m}{(2m+1)!!}x^{2m+1}$, $x\in\mathbb{R}$. **4.75.** $y(x)=C_1\frac{\operatorname{sen}x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$. ● La solución general debe contener dos constantes arbitrarias, por eso de las igualdades $r(r+1)a_0=0$ y $(r+1)(r+2)a_1=0$ escogemos $r=-1$, entonces $a_0\neq0$ y $a_1\neq0$. **4.74.** $y(x)=C_1\cos\sqrt{x}+$

$+C_2\operatorname{sen}\sqrt{x}$. **4.79.** $I_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}x$, $I_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$.

● Utilícese la igualdad $\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)=\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. **4.80.** $y(x)=$

$=C_1I_\nu(\alpha x)+C_2I_{-\nu}(\alpha x)$ si ν es un número no entero e $y(x)=$

$C_1I_n(\alpha x)+C_2N_n(\alpha x)$ si $\nu=n$ es un número entero. **4.81.** $y(x)=$

$= C_1 I_0(2x) + C_2 N_0(2x)$. 4.82. $\sqrt{y(x)} = C_1 I_{1/3}(2x) + C_2 I_{-1/3}(2x)$. 4.83. $y(x) = C_1 I_2(x\sqrt{3}) + C_2 N_2(x\sqrt{3})$. 4.84. $y(x) = C_1 I_{1/5}(3x) + C_2 I_{-1/5}(3x)$.

5.1. $|z-2|>1$; $\frac{z-2}{z-3}$. 5.2. $|z+i|>2$; $\frac{2i}{(z-i)^2}$. 5.3. $0<|z|<\infty$; $z^3 e^{1/z}$. 5.4. $1<|z-i|<\infty$; $\frac{1}{z^2}$. 5.5. $\frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^n$, $0<|z-1|<1$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$, $1<|z-1|<\infty$. 5.6. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$. $|z|>1$. ● Sustitúyase $z=1/\eta$ y desarróllese según las potencias η. 5.7. $-\frac{i}{4(z-i)^2} - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty} \times \times \frac{ki^k (z-i)^{k-1}}{2^k}$, $0<|z-i|<2$; $-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(-i)^k \frac{2^k}{(z-i)^{k+1}}$, $2<|z-i|<\infty$. ● $\frac{z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'$. Para el segundo desarrollo válganse de la sustitución $z-i=\frac{1}{\eta}$. 5.8. $\frac{1}{z^4}\sum_{k=0}^{\infty} \times \times (-1)^k \frac{k+1}{z^{2k}}$, $1<|z|<\infty$. ● $\frac{1}{(z^2+1)^3} = -\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'$. 5.9. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n)!}$, $0<|z|<\infty$. 5.10. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n)!}$, $0<|z|<\infty$. 5.11. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!\,(z-2)^{2n+1}}$, $0<|z-2|<\infty$. 5.12. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{n-3}}$, $0<|z|<\infty$. 5.13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{n-2}}$, $0<|z|<\infty$. 5.14. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{\cos 1}{(z-2)^{4n}} + \frac{4\operatorname{sen} 1}{(2n+1)} \times\right.$

$\times \frac{1}{(z-2)^{n+2}}\Big)$, $0 < |z-2| < \infty$. 5.15. $\operatorname{sen} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{5}{6}\frac{1}{z^3} + \ldots$, $1 < |z| < \infty$.

5.16. ● Examínese la integral $\int\limits_{|\eta - z_0| = \rho} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}$ y válganse de la acotación $f(z)$, que desprende de la existencia del límite $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$. 5.17. ● Empléese la siguiente afirmación: si $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $m \geqslant 1$, $\varphi(z_0) \neq 0$ y $\varphi(z)$ es una función analítica en el entorno del punto z_0, entonces en cierto entorno del punto z_0 es válido el desarrollo $\frac{1}{\varphi(z)} = b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots$, donde $b_0 = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0$. 5.18. ● Demuéstrese por reducción al absurdo, es decir, supóngase que $f(z)$ está acotada en el entorno del punto z_0 y dedúzcase de esta suposición que z_0 es un punto singular evitable. 5.19. ● Analícese la función $\psi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$; demuéstrese que z_0 es un punto esencialmente singular para $\varphi(z)$ y aprovéchese la afirmación del problema 5.18. 5.20. $\sum\limits_{n=1}^{0} c_n z^n$ converge en todo el plano y la serie $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ converge fuera del círculo $|z| \geqslant R$. 5.21. Los puntos $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ y $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4} + \pi i}$ son polos de tercer orden. 5.22. Los puntos $z_1 = 0$ y $z_2 = -1$ son polos de primer orden y el punto $z_3 = 1$ es un polo de tercer orden. 5.23. Los puntos $z_k = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, son polos de primer orden. 5.24. Los puntos $z_k = \pi(2k+1)/2$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, son polos de segundo orden. 5.25. El punto $z_0 = 3i$ es un punto esencialmente singular. 5.26. El punto $z_0 = -2i$ es esencialmente singular. 5.27. Los puntos $z_k = 1 + \frac{2}{\pi(2k+1)}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, son polos de primer orden y el punto $z = 1$ es un punto límite para los polos. 5.28. En el punto $z = 1$ tenemos una singularidad evitable y en los puntos $z_k = 1 + \frac{\pi(2k+1)}{2}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, polos de primer orden. 5.29. En el punto $z_0 = 0$ tenemos una singularidad evitable. 5.30. En el punto $z_0 = 0$ tenemos un polo de cuarto orden. 5.31. En los puntos $z_k = \ln 3 + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, tenemos polos de primer orden. 5.32. Un punto regular. 5.33. Un polo de tercer orden. 5.34. Un punto regular (cero de tercer orden). 5.35. Un polo de segundo orden. 5.36. Un punto esencialmente singular. 5.37. Un punto esencialmente singular. 5.38. Un polo de segundo orden. 5.39. Un

punto regular. 5.40. Un punto regular. 5.41. Un punto esencialmente singular.

6.1. $\operatorname{res}\left[\frac{z^2+1}{z-2};\ 2\right]=5$. 6.2. $\operatorname{res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2};\ i\right]=-\frac{1}{4}i$. $\operatorname{res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2};\ -i\right]=\frac{1}{4}i$. 6.3. $\operatorname{res}\left[\frac{z^{2n}}{(z-1)^n};\ 1\right]=\frac{2n(2n-1)\ldots(n+2)}{(n-1)!}$. 6.4. $\operatorname{res}\left[\frac{\operatorname{sen}2z}{(z+1)^3};\ -1\right]=-\frac{4\cos 2}{3}$. 6.5. $\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)};\ 0\right]=\frac{1}{9}$, $\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)};\ 3i\right]=\frac{ie^{3i}}{54}$, $\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)};\ -3i\right]=-\frac{ie^{-3i}}{54}$. 6.6. $\operatorname{res}\left[\operatorname{tg}z;\ \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]=-1$, $k\in\mathbb{Z}$. 6.7. $\operatorname{res}[\operatorname{ctg}^2 z;\ k\pi]=0$, $k\in\mathbb{Z}$. 6.8. $\operatorname{res}\left[\frac{\cos^3 z}{z^3};\ 0\right]=-\frac{3}{2}$. 6.9. $\operatorname{res}\left[\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)};\ 0\right]=0$, $\operatorname{res}\left[\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)};\ 1\right]=1$. 6.10. $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z(1-z^2)};\ 0\right]=1$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z(1-z^2)};\ 1\right]=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z(1-z^2)};\ -1\right]=-\frac{1}{2}$. 6.11. $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2-z^5};\ 0\right]=0$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2-z^5};\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{1+i\sqrt{3}}{6}$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2-z^5},\ 1\right]=-\frac{1}{3}$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2-z^5};\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{1-i\sqrt{3}}{6}$. 6.12. $\left[\frac{\cos 4z}{(z-2)^6};\ 2\right]=-\frac{128}{15}\operatorname{sen}8$. 6.13. 1. 6.14. 0. 6.15. 1. 6.16. -1. 6.17. 0. 6.18. $-\frac{1}{3}\operatorname{sh}3$. ● Empléose el segundo teorema sobre los residuos. 6.19. 0. 6.20. π^2. 6.21. -1. 6.22. $\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}$. 6.23. $\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}$. 6.24. $2\pi i$. 6.25. $4\pi i$. 6.26. $-4\pi i$. 6.27. $\frac{2\pi i}{9}$. 6.28. $\frac{2\pi i}{3}\operatorname{sh}3$. ● Válganse del segundo teorema sobre los residuos y del resultado del problema 6.18. 6.29. $(-1)^n\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!}\frac{2\pi i}{(b-a)^{2n-1}}$. 6.30. 0. ● Empléense el segundo teorema sobre los residuos y la relación $\operatorname{res}[f(z);\ \infty]=0$. 6.31. $2\pi i$. 6.32. 0. 6.33. 0. 6.34. 0. 6.35. $-4\pi i$. 6.36. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. 6.37. $\frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}$. 6.38. $\pi\sqrt{2}$. 6.39. $\frac{\pi}{2^{2n-2}}\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!}$. 6.40. $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$. 6.41. $\frac{\pi}{4a}$. 6.42.

$\frac{\pi e^{-4}}{2}(\operatorname{sen} 2+2\cos 2)$. 6.43. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}\right)$. 6.44. $\frac{\pi}{2}e^{-ab}$. 6.45. $\frac{\pi}{6}e^{-3}$. 6.46. $\pi\frac{2e-1}{12e^2}$. 6.47. Dos raíces. ● $p(it)$, al variar t desde $+\infty$ hasta $-\infty$, no recibe incremento. 6.48. Dos raíces. 6.49. Tres raíces. 6.50. ● Utilícese el hecho de que $\arg fg=\arg f+\arg g$ y $\arg\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)$ no adquiere incremento cuando el punto z recorre el contorno L, ya que $\left|\frac{\varphi(\eta)}{f(\eta)}\right|_{\eta\in L}<1$. 6.51. ● Analícense las funciones $f(z)=a_0z^n$ y $\varphi(z)=a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ en la circunferencia $|z|=R$ de un radio bastante grande R. 6.52. a) en el círculo $|z|<1$ hay un cero; b) en el anillo $1\leqslant|z|<2$ hay cuatro ceros. ● Póngase $f(z)=8z$ en el caso a) y $f(z)$ en el caso b). 6.53. a) en el círculo $|z|<1$ hay un cero; b) en el anillo $1\leqslant|z|<2$ no hay ceros; c) en el anillo $2\leqslant|z|<3$ hay dos ceros.

7.2. Para la función par: $\beta_k=0$, $\alpha_k=\frac{4}{l}\int_0^{l/2}f(x)\cos\frac{2\pi kx}{l}\,dx$, para la impar: $\alpha_k=0$, $\beta_k=\frac{4}{l}\int_0^{l/2}f(x)\operatorname{sen}\frac{2\pi kx}{l}\,dx$ $(k=0,1,\ldots)$.

7.3. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_m^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2m-1)x}{2m-1}$, $S(\pi)=\frac{1}{2}$ (fig. 103). 7.4. $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}kx}{k}$, $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ (fig. 104). 7.5. $f(x)\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\times$ $\times\frac{\cos\pi(2m-1)x}{(2m-1)^2}$, $S(1)=1$ (fig. 105). 7.6. $f(x)=\frac{1}{\ln 2}+2\ln 2\times$ $\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cos k\pi-1}{\ln^2 2+k^2\pi^2}\cos\frac{\pi kx}{\ln 2}$. 7.7. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{4}}{k}\operatorname{sen}kx$. 7.8. $f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\pi kx$. 7.9. $f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}\times$ $\times\operatorname{sen}\frac{\pi(2m+1)x}{2}$. 7.10. $f(x)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}x-\frac{16}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{(4m^2-1)^2}\operatorname{sen}2mx$.

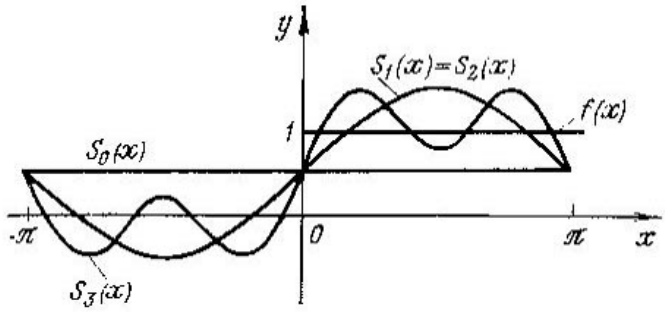


Fig. 103

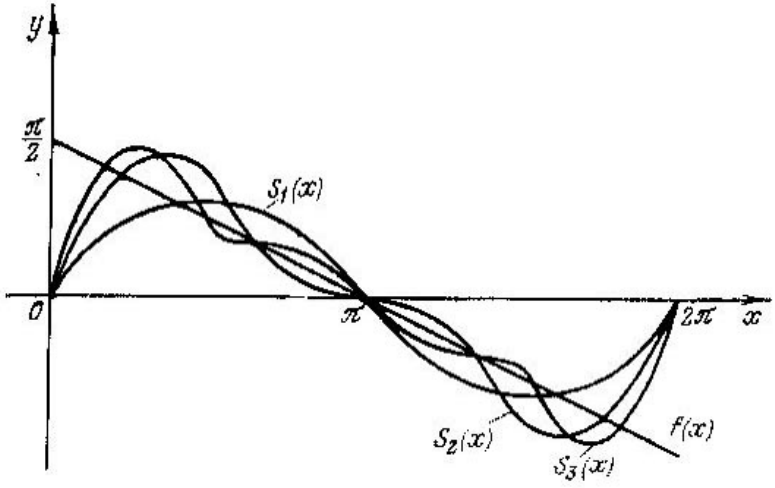


Fig. 104

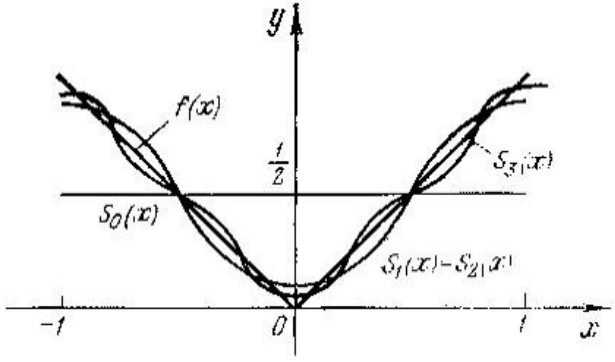


Fig 105.

7.11. a) $\frac{\pi^2}{8}$; b) $\frac{\pi^2}{32\sqrt{2}}$. ● Examínese la serie en el punto $x_0 = 1/4$. **7.12.** $\pi^2/12$. **7.13.** $\pi^2/6$. **7.14.** ● Multiplicando y dividiendo $\mathscr{D}_n(x)$ entre $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$, obtenemos $\mathscr{F}_n(x) = \frac{1}{2(n+1)\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \times$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{2k+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} = \frac{1}{4(n+1)\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n} (\cos kx -$$

$$- \cos(k+1)x) = \frac{1-\cos(n+1)x}{4(n+1)\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{n+1} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{n+1}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}.$$

7.15. $f(x, y) = \pi^2 - 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} mx}{m} - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ny}{n} + 4 \sum_{m,\, n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny}{mn}$.

7.16. $f(x, y) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \operatorname{sen} mx + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} ny +$

$$+ \sum_{m,\, n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{mn} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny. \quad \textbf{7.17.} \quad f(x, y) = \frac{4}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \times$$

$$\times \operatorname{sen} \frac{\pi n y}{2} + \frac{16}{\pi^3} \sum_{m,\, n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+1}}{m^2 n} \cos \pi m x \operatorname{sen} \frac{\pi n y}{2}. \quad \textbf{7.18.} \quad f(x,$$

$$y) = \frac{2\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen} \pi m x + \frac{2}{\pi} \sum_{m,\, n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+1}}{mn^2} \operatorname{sen} \pi m x \times$$

$$\times \cos ny. \quad \textbf{7.19.} \quad \mathfrak{F}[\operatorname{sign}(t-a) - \operatorname{sign}(t-b)] = \frac{2 \operatorname{sen} \pi\nu (b-a)}{\pi\nu} \times$$

$$\times e^{-\pi i \nu (a+b)}. \quad \textbf{7.20.} \quad \mathfrak{F}[f] = h \frac{\operatorname{sen}^2 \pi\nu a}{\pi^2 \nu^2 a}. \quad \textbf{7.21.} \quad \mathfrak{F}[f] =$$

$$= \begin{cases} \frac{4\pi\nu}{a^2 - 4\pi^2\nu^2} \operatorname{sen} \frac{4\pi^2\nu}{2a} & \text{para } \nu \neq \frac{a}{2\pi}, \\ \frac{\pi}{a} & \text{para } \nu = \frac{a}{2\pi}. \end{cases} \quad \textbf{7.22.} \quad \mathfrak{F}[f] = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \pi\nu}{\pi i \nu}.$$

7.23. $\mathfrak{F}_c\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} e^{-\omega a}$; $\frac{1}{a^2+t^2} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\omega a} \cos \omega t \, d\omega$.

● La integral $\mathfrak{F}_c\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]$ se calcula integrando según el parámetro ω (véase el problema 4.28. del cap. 8). **7.24.** $\mathfrak{F}_s\left[\frac{t}{a^2+t^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\omega a}$, $\frac{t}{a^2+t^2} = \int_0^{-\infty} e^{-\omega\omega} \operatorname{sen} \omega t\, d\omega$. ● Utilícese la relación $\mathfrak{F}_s\left[\frac{t}{a^2+t^2}\right] = -\frac{d}{d\omega}\,\mathfrak{F}_c\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]$, donde la integral $\mathfrak{F}_c \times \left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]$ está calculada en el problema 7.23. **7.25.** $\mathfrak{F}_s\left[te^{-t^2}\right] = \frac{\omega}{2\sqrt{2}}\, e^{-\omega^2/4}$, $te^{-t^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\omega}{2\sqrt{2}}\, e^{-\omega^2/4} \operatorname{sen} \omega t\, d\omega$. **7.26.** $\mathfrak{F}_c\left[e^{-\alpha|t|} \cos \beta t\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)}{(\alpha^2+(\beta+\omega)^2)(\alpha^2+(\beta-\omega)^2)}$, $e^{-\alpha|t|}\cos \beta t = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{(\alpha^2+(\beta+\omega)^2)(\alpha^2+(\beta-\omega)^2)} \cos \omega t\, d\omega$. **7.28.** $S(\nu_k) = -\frac{2i}{\pi\nu_k} \operatorname{en}^2 \pi\nu_k T$, $\nu_k = \frac{k}{4T}$, $\rho(\nu_k) = \frac{2}{\pi|\nu_k|} \operatorname{sen}^2 \pi\nu_k T$, $\Phi(\omega_k) = \begin{cases} 0 \text{ para } k = 4n, \\ \frac{\pi}{2} \text{ para } k \neq 4n, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$ (fig. 106). **7.29.** $S(\nu_k) = \frac{\operatorname{sen} 2\pi\nu_k - i(1-\cos 2\pi\nu_k)}{\pi\nu_k}$, $\nu_k = \frac{k}{3}$, $\rho(\nu_k) = \frac{2|\operatorname{sen} \pi\nu_k|}{\pi|\nu_k|}$, $\Phi(\nu_k) = \begin{cases} \pi\nu_k \text{ para } k = 1, 2, \\ 0 \text{ para } k = 3, \end{cases}$ $\Phi(\nu_{k+2}) = \Phi(\nu_k)$ (fig. 107). **7.30.** $S(\nu) = \frac{\operatorname{sen} 2\pi a\nu}{\pi\nu}$, $\rho(\nu) = \frac{|\operatorname{sen} 2\pi a\nu|}{\pi|\nu|}$, $\Phi(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{si } S(\nu) \geq 0, \\ -\pi, & \text{si } S(\nu) < 0 \end{cases}$ (fig. 108). **7.31.** $S(\nu) = \frac{2\cos \pi\nu}{\pi(1-4\nu^2)}$, $\rho(\nu) = \frac{2}{\pi}\left|\frac{\cos \pi\nu}{1-4\nu^2}\right|$, $\Phi(\nu) = \begin{cases} 0, \text{ si } S(\nu) \geq 0, \\ -\pi, \text{ si } S(\nu) < 0 \end{cases}$ (fig. 109). ● Para calcular la integral $\int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi t e^{-2\pi i\nu t}\, dt$ la función $\cos \pi t$ debe representarse según la fórmula de Euler. **7.32.** $S(\nu) = \frac{\operatorname{sen}^2 \pi\nu}{\pi\nu^2}$, $\rho(\nu) = \frac{\operatorname{sen}^2 \pi\nu}{\pi\nu^2}$, $\Phi(\nu) = 0$ (fig. 110). **7.33.** $S(\nu) = \frac{\operatorname{sen} 4\pi\nu + i(\cos 4\pi\nu - 1)}{\pi\nu}$, $\rho(\nu) =$

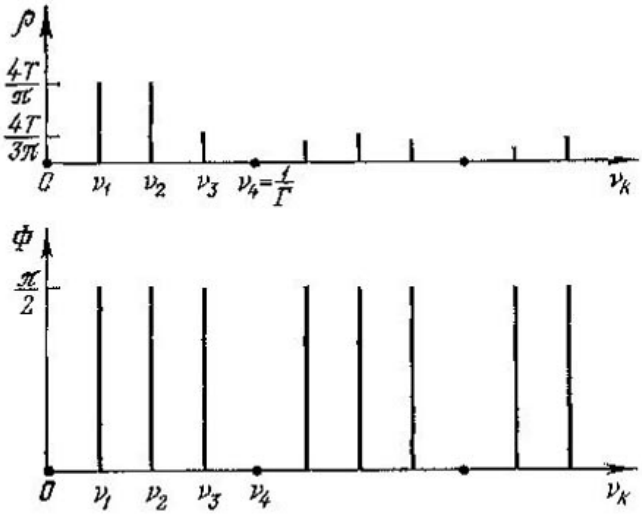


Fig. 106

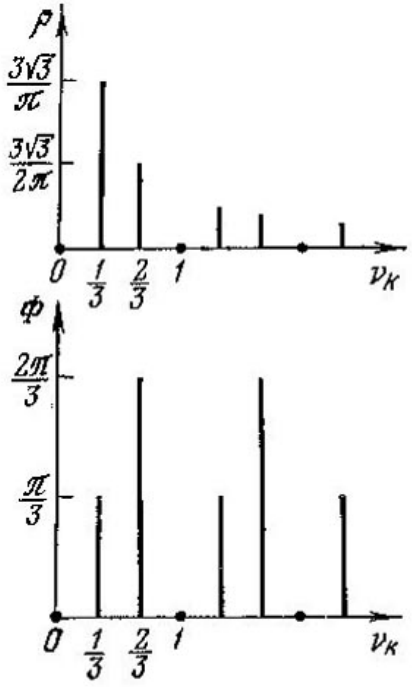


Fig. 107

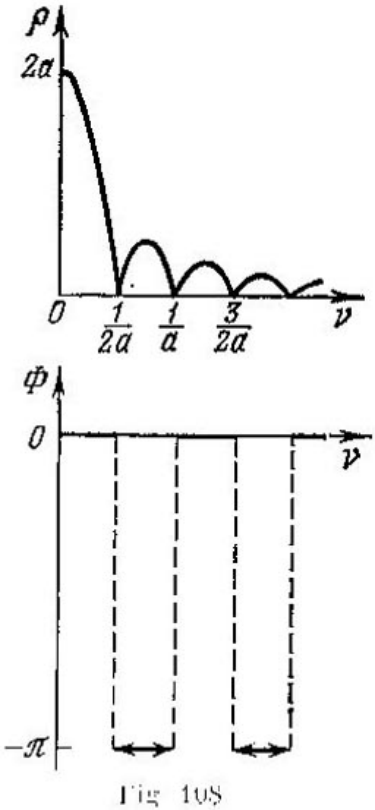


Fig. 108

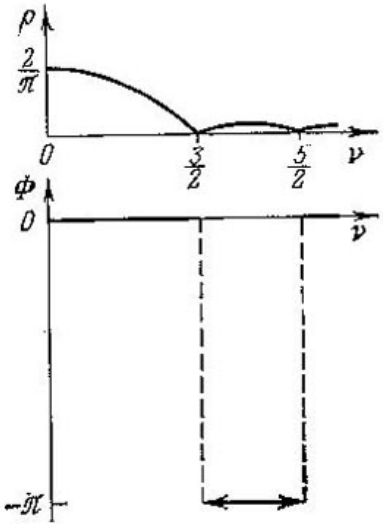
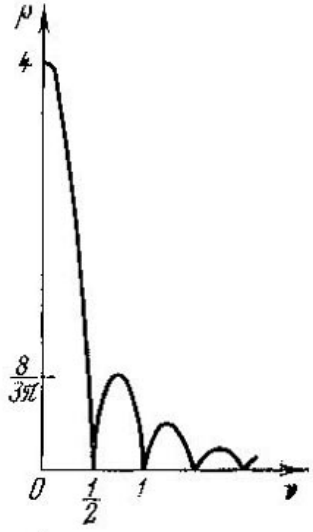


Fig. 109



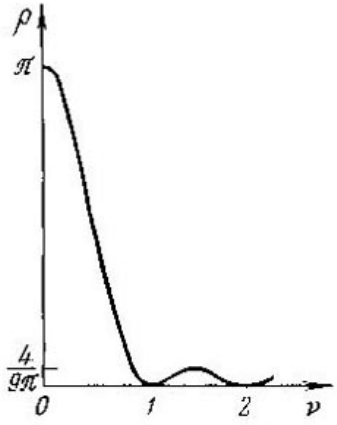


Fig. 110

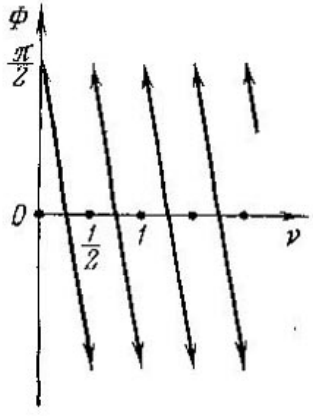


Fig. 111

$$= \frac{2}{\pi|\nu|} |\operatorname{sen} 2\pi\nu|, \quad \Phi(\nu) = -\arg S(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{si } \nu = 0 \text{ y } \omega = 1/2, \\ -2\pi\nu, & \text{si } 0 < \nu < 1/2, \end{cases}$$

$\Phi\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = \Phi(\nu)$ (fig. 111).

7.34.
$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q^2 \end{pmatrix},$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q^3 \end{pmatrix}.$$

7.35.
$$Z^{(1)} = \begin{pmatrix} x_0 + x_4 \\ x_0 - x_4 \\ x_1 + x_5 \\ x_1 - x_5 \\ x_2 + x_6 \\ x_2 - x_6 \\ x_3 + x_7 \\ x_3 - x_7 \end{pmatrix}, \quad Z^{(2)} = \begin{pmatrix} (x_0 + x_4) + (x_2 + x_6) \\ (x_0 - x_4) + q^2 (x_2 - x_6) \\ (x_0 + x_4) - (x_2 + x_6) \\ (x_0 - x_4) - q^2 (x_2 - x_6) \\ (x_1 + x_5) + (x_3 + x_7) \\ (x_1 - x_5) + q^2 (x_3 - x_7) \\ (x_1 + x_5) - (x_3 + x_7) \\ (x_1 - x_5) - q^2 (x_3 - x_7) \end{pmatrix},$$

$$Z^{(3)} = \begin{pmatrix} (x_0 + x_4 + x_2 + x_6) + (x_1 + x_5 + x_3 + x_7) \\ (x_0 - x_4 + q^2x_2 - q^2x_6) + (qx_1 - qx_5 + q^3x_3 - q^3x_7) \\ (x_0 + x_4 - x_2 - x_6) + (q^2x_1 + q^2x_5 - q^2x_3 - q^2x_7) \\ (x_0 - x_4 - q^2x_2 + q^2x_6) + (q^3x_1 - q^3x_5 - qx_3 + qx_7) \\ (x_0 + x_4 + x_2 + x_6) - (x_1 + x_5 + x_3 + x_7) \\ (x_0 - x_4 + q^2x_2 - q^2x_6) - (qx_1 - qx_5 + q^3x_3 - q^3x_7) \\ (x_0 + x_4 - x_2 - x_6) - (q^2x_1 + q^2x_5 - q^2x_3 - q^2x_7) \\ (x_0 - x_4 - q^2x_2 + q^2x_6) - (q^3x_1 - q^3x_5 - qx_3 + qx_7) \end{pmatrix}.$$

7.36.
```
      SUBROUTINE FASTFT(N,N1,KIND,A,B,AA,BB)
      DIMENSION A(N1),B(N1),AA(N1),BB(N1)
      INTEGER V
      M = 1
    1 K = 0
    2 V = 0
    3 J = (2**M)*K + V + 1
      I = (2**(M - 1))*K + V + 1
      C = 3.141593*FLOAT(V)/(2**(M - 1))
      IF(KIND) 7,7,8
    7 SI = SIN(C)
      GO TO 9
    8 SI = -SEN(C)
    9 CO = COS(C)
      NI = 2**(N - 1) + I
      JM = J + 2**(M - 1)
      AO = A(NI)
      BO = B(NI)
      AA(J) = A(I) + AO*CO + BO*SI
      BB(J) = B(I) - AO*SI + BO*CO
      AA(JM) = A(I) - AO*CO - BO*SI
      BB(JM) = B(I) + AO*SI - BO*CO
      V = V + 1
      IF(V - 2**(M - 1)) 3,4,4
    4 K = K + 1
      IF(K - 2**(N - M)) 2,5,5,
    5 M = M + 1
```

```
      DO 13 I = 1,N1
      A(I) = AA(I)
   13 B(I) = BB(I)
      IF(M - N) 1,1,6
    6 IF(KIND) 10,10,12
   10 DO 11 I = 1,N1
      AA(I) = AA(I)/N1
   11 BB(I) = BB(I)/N1
   12 RETURN
      END
```

7.37.
```
      SUBROUTINE F730(A,B)
      DIMENSION A(128),B(128)
      DO 1 I = 1,128
      A(I) = 25
    1 B(I) = 0.
      RETURN
      END
```

7.38.
```
      SUBROUTINE F731(A,B)
      DIMENSION A(128),B(128)
      DO 1 I = 1,32
      A(I) = 0.
      A(I + 96) = 0.
    1 B(I) = 0
      DO 2 I = 33,96
      A(I) = 20.
    2 B(I) = 0
      RETURN
      END
```

7.39.
```
      SUBROUTINE F732(A,B)
      DIMENSION A(128), B(128)
      DO 1 I = 1,128
      T = I
      A(I) = T*(128. - T)/32.
    1 B(I) = 0.
      RETURN
      END
```

```
7.40. SUBROUTINE F733(A,B)
      DIMENSION A(128),B(128)
      DO 1 I = 1,64
      T = I
      A(I) = T
      A(1 + 64) = 64. — T
      B(I) = 0.
    1 B(1 + 64) = 0.
      RETURN
      END
7.41. SUBROUTINE F734(A,B)
      DIMENSION
      DO I I = 1,128
      A(I) = I
    1 B(I) = 0.
      RETURN
      END
7.42. DIMENSION A(128),B(128),AT(128),BT(128),A1(128),B1(128),
     *A2(128),B2(128)
      CALL F734(A,B)
      WRITE (3,10)
   10 FORMAT (30H0 SUCESION INICIAL)
      WRITE (3,1) A,B
    1 FORMAT ('', 16F7.2)
      DO 2 I = 1,128
      A1(I) = A(I)
    2 B1(I) = B(I)
      CALL FASTFT (7,128,0,A1,B1,AT,BT)
      WRITE (3,11)
      FORMAT (6H0 TDF)
   11 WRITE (3,1) AT,BT
      M = 24
      DO 6 I = 1,M
      AT(64 — I) = 0.
```

```
      BT(64 — I) = 0.
      AT(64 + I) = 0.
    6 BT(64 + I) = 0.
      DO 4 I = 1,128
      A1(I) = AT(I)
    4 B1(I) = BT(I)
      CALL FASTFT (7,128,1,A1,B1,A2,B2)
      WRITE (3,12) M
   12 FORMAT ( 'M = ',16)
      DO 7 I = 1,128
      A1(I) = A(I) — A2(I)
    7 B1(I) = B(I) — B2(I)
      WRITE (3,1) A1,B1
      M = M + 8
      IF(M — 40) 5,5,8
    8 STOP
      END
```

CAPÍTULO 13

CALCULO OPERACIONAL

§ 1. Transformación de Laplace

1. Definición y propiedades de la transformación de Laplace. Se llama *transformación de Laplace* de la función $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (que, en general, puede tomar los valores complejos) la función $F(p)$ de la variable compleja p, determinada por la igualdad siguiente:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Si la función $f(t)$ satisface las siguientes condiciones:
1) $f(t) = 0$ para $t < 0$,
2) existen tales constantes σ y M que

$$|f(t)| < Me^{\sigma t} \quad \text{para} \quad t > 0 \tag{2}$$

(la magnitud $\sigma_0 = \inf \sigma$ se llama *índice de crecimiento* de la función $f(t)$),

3) en cualquier segmento finito $[0, T]$ la función $f(t)$ tiene no más puntos que el número finito de puntos de discontinuidad de primer género, además consideramos que $f(0) = f(+0)$,

entonces la función $f(t)$ se llama *original* y *la integral de Laplace* que figura en el segundo miembro de la igualdad (1) converge absoluta y uniformemente en todo el semiplano $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma > \sigma_0$.

Señalemos que la desigualdad (2) se cumple para cualquier $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, y para $\sigma = \sigma_0$ puede no verificarse como, por ejemplo, en el caso en que $f(t)$ es un polinomio ($\sigma_0 = 0$).

La función $F(p)$ se llama *representación para* $f(t)$. La representación $F(p)$ es una función analítica en el semiplano $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

La correspondencia entre el original $f(t)$ y su representación $F(p)$ se denota simbólicamente $F(p) \doteq f(t)$ o $F(p) = L[f(t)]$. Utilizaremos el primer símbolo.

Hállense las representaciones de las funciones siguientes:

1.1. *De la función unitaria de Heaviside*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{para} \quad t < 0. \end{cases}$$

1.2. $e^{\alpha i}\eta(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

En adelante, por función $f(t)$ dada con ayuda de la fórmula analítica se comprenderá el producto de esta función por la función unitaria de Heaviside, es decir, consideraremos $f(t) = 0$ para $t < 0$.

Supongamos que las funciones que se estudian más abajo $f(t)$, $f_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, son originales, además $f_\nu(t) \doteqdot F_\nu(p)$ para $\operatorname{Re} p > \sigma_\nu$. Tienen lugar las siguientes propiedades:

1. PROPIEDAD DE LINEALIDAD. Para cualesquiera constantes C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p), \quad \operatorname{Re} p > \text{más}\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}.$$

2. TEOREMA DE SEMEJANZA. Para cualquier constante $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re} p > \alpha\sigma_0.$$

3. TEOREMA DE RETARDO. Al retardo de inclusión del original en τ le corresponde la multiplicación de la representación por $e^{-p\tau}$, es decir,

$$f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau} F(p), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0$$

(para $t < \tau$ en virtud de la condición 1) impuesta sobre el original, $f(t-\tau) \equiv 0$).

4. TEOREMA DE DESPLAZAMIENTO. A la multiplicación del original por $e^{\alpha t}$ le corresponde el retardo de la representación en α, es decir,

$$e^{\alpha t} f(t) \doteqdot F(p-\alpha), \quad \operatorname{Re}(p-\alpha) > \sigma_0.$$

5. DIFERENCIACIÓN DEL ORIGINAL. Si $f(t)$ y sus derivadas $f^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, son originales, entonces para todo $k = 1, 2, \ldots, n$

$$f^{(k)}(t) \doteqdot p^k F(p) - (p^{k-1} f(0) + p^{k-2} f'(0) + \ldots + f^{(k-1)}(0)).$$

En particular,

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

6. INTEGRACIÓN DEL ORIGINAL:

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

7. DIFERENCIACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN. A la multiplicación del original por el factor t le corresponde la multiplicación de la representación por -1 y su diferenciación según el argumento p:

$$t^n f(t) \doteqdot (-1)^n F^{(n)}(p), \quad n = 1, 2, \ldots$$

8. INTEGRACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN. Si $\frac{f(t)}{t}$ es original, entonces

$$\frac{1}{t} f(t) \doteqdot \int_p^\infty F(q)\, dq.$$

9. DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN SEGÚN EL PARÁMETRO. Si $f(t, \alpha) \doteqdot F(p, \alpha)$ y las funciones $\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}$ y $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha)\, d\alpha$, consideradas como funciones de la variable t, son originales, entonces

$$\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} \doteqdot \frac{\partial F(p, \alpha)}{\partial \alpha} \text{ y } \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha)\, d\alpha \doteqdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(p, \alpha)\, d\alpha.$$

10. TEOREMA DE BOREL (multiplicación de representaciones). A la convolución de los originales

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau$$

le corresponde el producto de las representaciones, es decir,

$$f_1 * f_2 \doteqdot F_1(p) F_2(p).$$

11. INTEGRAL DE DUHAMELE. Si $f(t) \doteqdot F(p)$ y $g(t) \doteqdot G(p)$, entonces

$$pF(p) G(p) \doteqdot f(0) g(t) + (f' * g)(t) = g(0) f(t) + (g' * f)(t).$$

12. TEOREMAS DE CONEXIÓN de los valores «iniciales» y «finales» del original y de la representación. Si $f(t) \doteqdot F(p)$, entonces

a) $f(0) = \lim_{p \to \infty} pF(p)$

y (si existe el límite finito $\lim_{t \to +\infty} f(t) = f(+\infty)$)

b) $f(+\infty) = \lim_{p \to 0} pF(p)$.

EJEMPLO 1. Hállese la representación de la función sen βt y cos βt.

◀ Aplicando la fórmula de Euler, la propiedad de linealidad y tomando en consideración la solución del problema 1.2, hallamos

$$\operatorname{sen} \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\beta} - \frac{1}{p + i\beta}\right) = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$$

$$(\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \beta|).$$

Análogamente

$$\cos \beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \doteqdot \frac{p}{p^2 + \beta^2} \quad (\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \beta|). \blacktriangleright$$

Para calcular las representaciones, además de las propiedades indicadas, se debe emplear *la tabla de representaciones*.

EJEMPLO 2. Hállese la representación de la función $\operatorname{sen}^3 t$.

◀ Según la fórmula de Euler tenemos

$$\operatorname{sen}^3 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{3(e^{it} - e^{-it})}{2i} - \frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{3}{4} \operatorname{sen} t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3t.$$

No	$f(t)$	$F(p)$	No	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	7	$\operatorname{ch} \beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$
2	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	8	$\operatorname{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	9	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
4	$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$	10	$e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
5	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	11	$\frac{t^n}{n!} \cos \beta t$	$\frac{\operatorname{Re}((p+\beta i)^{n+1})}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$
6	$\operatorname{sen} \beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	12	$\frac{t^n}{n!} \operatorname{sen} \beta t$	$\frac{\operatorname{Im}((p+\beta i)^{n+1})}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$

Aplicando la propiedad de linealidad y la fórmula 6 de la tabla, hallamos:

$$\operatorname{sen}^3 t \doteqdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{p^2+9} = \frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Hállese la representación de las funciones $te^{\alpha t} \times \cos \beta t$ y $te^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$.

◀ Empleando las fórmulas 11 y 12 de la tabla para $n = 1$ y el teorema de desplazamiento hallamos

$$te^{\alpha t} \cos \beta t \doteqdot \frac{\operatorname{Re}(((p-\alpha)+\beta i)^2)}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2} = \frac{(p-\alpha)^2-\beta^2}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2},$$

$$te^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \doteqdot \frac{\operatorname{Im}(((p-\alpha)+\beta i)^2)}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2} = \frac{2\beta(p-\alpha)}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 4. Hállese la representación de la función Si $t = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} \tau}{\tau} d\tau$ (esta función se llama *seno integral*).

◀ Valiéndose del teorema de integración de la representación hallamos

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} \doteqdot \int_p^\infty \frac{dq}{q^2+1} = \operatorname{arctg} q \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

e aquí, según el teorema de integración del original obtenemos

$$\text{Si } t = \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau}\,d\tau \doteq \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p\right). \blacktriangleright$$

EJEMPLO 5. Hállese el original para la función $F(p) = \dfrac{p}{p^4+4}$.

◀ Primer procedimiento. Descomponemos el denominador en factores:

$$p^4 + 4 = (p^4 + 4p^2 + 4) - 4p^2 = (p^2 + 2p + 2)(p^2 - 2p + 2) =$$
$$= ((p+1)^2 + 1)((p-1)^2 + 1).$$

Utilizamos el teorema de Borel y la fórmula 10 de la tabla:

$$\frac{1}{(p+1)^2+1} \cdot \frac{1}{(p-1)^2+1} \doteq \int_0^t e^{\tau} \operatorname{sen}\tau e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-t} \int_0^t e^{2\tau} (\cos(2\tau - t) - \cos t)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-t} \left(\frac{e^{2\tau}}{2^2+2^2} (2\cos(2\tau - t) + 2\operatorname{sen}(2\tau - t)) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} e^{2\tau} \cos t \right) \Big|_{\tau=0}^{t} =$$

$$= \frac{e^t}{8} (\operatorname{sen} t - \cos t) + \frac{e^{-t}}{8} (\operatorname{sen} t + \cos t) = \frac{1}{4} (\operatorname{sen} t \operatorname{ch} t - \cos t \operatorname{sh} t)$$

(en la integración fue empleada dos veces la regla de integración por partes). Apliquemos ahora el teorema de diferenciación del original. En nuestro caso $f(0) = 0$, por eso

$$F(p) = \frac{p}{p^4+4} \doteq f'(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \operatorname{sh} t.$$

Segundo procedimiento. Descompongamos el denominador en factores lineales (lo que siempre es posible, si no se tiende a anotar la descomposición en la forma real):

$$p^4 + 4 = ((p+1)^2 + 1)((p-1)^2 + 1) =$$
$$= (p + 1 + i)(p + 1 - i)(p - 1 + i)(p - 1 - i).$$

Desarrollemos ahora la función dada en fracciones elementales:

$$F(p) = \frac{1}{8} \left(-\frac{i}{p+1+i} + \frac{i}{p+1-i} + \frac{i}{p-1+i} - \frac{i}{p-1-i} \right)$$

y, empleando la fórmula 3 de la tabla, obtenemos

$$f(t) = \frac{i}{8} (-e^{-(1+i)t} + e^{-(1-i)t} + e^{(1-i)t} - e^{(1+i)t} =$$

$$= \frac{i}{8}\left(e^{it}\left(e^{-t}-e^{t}\right)+e^{-it}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\right) = -\frac{i}{8}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\left(e^{it}-e^{-it}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2}\operatorname{sh} t \operatorname{sen} t. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Hállese la representación del original $f(t)$, si

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{para } 0 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{para } t \geqslant \pi. \end{cases}$$

◀ Empleando la función de Heaviside y tomando en consideración que $\eta(t-\pi) = 1$ para $t \geqslant \pi$, podemos anotar la función $f(t)$ en la forma

$$f(t) = \operatorname{sen} t + \eta(t-\pi)\operatorname{sen}(t-\pi).$$

Utilizando la fórmula 6 de la tabla y aplicando el teorema de retardo obtendremos

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{e^{-\pi p}}{p^2+1} = \frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 7. Hállese el original para la función $F(p) = \frac{p}{p^2+4} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2-1}$.

◀ De la tabla de representaciones hallamos $\frac{p}{p^2+4} \doteqdot \cos 2t$, $\frac{1}{p^2} \doteqdot t$, $\frac{1}{p^2-1} \doteqdot \operatorname{sh} t$, y con ayuda del teorema de retardo obtenemos

$$F(p) \doteqdot f(t) = \cos 2t - \eta(t-1)(t-1) + \eta(t-2)\operatorname{sh}(t-2),$$

es decir,

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ \cos 2t - t + 1 & \text{para } 1 \leqslant t < 2, \\ \cos 2t - t + 1 + \operatorname{sh}(t-2) & \text{para } 2 \leqslant t + \infty. \blacktriangleright \end{cases}$$

Hállense las representaciones de las funciones

1.3. $\operatorname{sh}^3 t$. **1.4.** $\operatorname{ch} t \operatorname{sen} t$.

Hállense las representaciones de las funciones $f(t)$ y $f'(t)$ (hállese la representación de $f'(t)$ aplicando el teorema de diferenciación del original y verifíquese el resultado valiéndose de la tabla de representaciones):

1.5. $f(t) = \operatorname{sen} t - t\cos t$. **1.6.** $f(t) = t\operatorname{sen} t + \cos t$.

1.7. $f(t) = e^{-t}\operatorname{sen}^2 t$.

1.8. $f(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t \operatorname{sen} t + \operatorname{sh} t \cos t)$.

Empleando el teorema de integración de la representación y luego el teorema de integración del original, hállense

las representaciones de las funciones:

1.9. $\int_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau - 1}{\tau}\,d\tau$. **1.10.** $\int_0^t \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau$. **1.11.** $\int_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}\,d\tau$.

Empleando el teorema de integración según el parámetro y luego el teorema de integración del original, hállense las representaciones de las funciones:

1.12. $\int_0^t \frac{\cos\beta\tau - \cos\alpha\tau}{\tau}\,d\tau$. **1.13.** $\int_0^t \frac{e^{\beta\tau} - e^{\alpha\tau}}{\tau}\,d\tau$.

Con ayuda del teorema de Borel y luego los teoremas de diferenciación e integración del original, hállense los originales para las funciones $F(p)$, $pF(p)$ y $\frac{F(p)}{p}$. Verifíquese el resultado empleando el desarrollo en fracciones elementales y la tabla de representaciones.

1.14. $F(p) = \frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$. **1.15.** $F(p) = \frac{p}{(p^2+\beta^2)^2}$,

1.16. $F(p) = \frac{p}{(p^2-\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$.

1.17. $F(p) = \frac{1}{(p-\alpha)((p+\alpha)^2+\beta^2)}$.

1.18. $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}$.

Empleando el teorema de retardo, hállense las representaciones de las funciones siguientes:

1.19. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ para } 0 \leqslant t < \tau, \\ 0 \text{ para } t \geqslant \tau \end{cases}$

(impulso unitario que actúa en el intervalo de tiempo de $t=0$ a $t=\tau$).

1.20. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < T, \\ 1 \text{ para } T \leqslant t < T+\tau, \\ 0 \text{ para } t \geqslant T+\tau \end{cases}$

(impulso unitario retardado).

1.21. $f(t)=\begin{cases} \frac{h}{\tau}t & \text{para } 0\leqslant t<\tau, \\ h & \text{para } \tau\leqslant t<2\tau, \\ -\frac{h}{\tau}(t-3\tau) & \text{para } 2\tau\leqslant t<3\tau, \\ 0 & \text{para } t\geqslant 3\tau. \end{cases}$

1.22. $f(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{para } 0\leqslant t<\pi/2, \\ \cos t & \text{para } \pi/2\leqslant t<\pi, \\ 0 & \text{para } t\geqslant\pi. \end{cases}$

1.23. $f(t)=\begin{cases} h & \text{para } 0\leqslant t<1, \\ h^{-(t-1)} & \text{para } t\geqslant 1. \end{cases}$

1.24. $f(t)=\begin{cases} \operatorname{son} t & \text{para } 0\leqslant t<\pi, \\ \operatorname{sh}(t-\pi) & \text{para } t\geqslant\pi. \end{cases}$

1.25.** Demuéstrese que si $F_0(p)\doteqdot f_0(t)$, donde

$$f_0(t)=\begin{cases} 0 & \text{para } t<0, \\ f(t) & \text{para } 0\leqslant t<l, \\ 0 & \text{para } t\geqslant l \end{cases}$$

y la función $f(t)$ para $t>l$ es periódica con el período l (es decir, $f(t+l)=f(t)$), entonces

$$f(t)\doteqdot\frac{F_0(p)}{1-e^{-lp}}.$$

Utilizando el resultado del problema 1.25. y las designaciones adoptadas en este problema, conociendo la función $f_0(t)$ y el período l, hállense las representaciones de las siguientes funciones periódicas $f(t)$:

1.26. $f_0(t)=\begin{cases} 1 & \text{para } 0\leqslant t<\tau \\ 0 & \text{para } \tau\leqslant t<T; \end{cases}$ $l=T$

(sucesión periódica de impulsos unitarios).

1.27*. $f_0(t)=\operatorname{sen}\beta t$ para $0<t<\frac{\pi}{\beta}$; $l=\frac{\pi}{\beta}$ (es decir, $f(t)=|\operatorname{sen}\beta t|$).

1.28. $f_0(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{para } 0\leqslant t<\pi \\ 0 & \text{para } \pi\leqslant t<T; \end{cases}$ $l=T$.

1.29. $f_0(t) = \begin{cases} h \text{ para } 0 \leqslant t < c, \\ -h \text{ para } c \leqslant t < 2c; \end{cases} \quad l = 2c$

1.30. $f_0(t) = \frac{h}{c} t$ para $0 \leqslant t < c$; $l = c$.

1.31. $f_0(t) = \begin{cases} \frac{h}{c} t \text{ para } 0 \leqslant t < c. \\ -\frac{h}{c} t \text{ para } c \leqslant t < 2c; \end{cases} \quad l = 2c.$

1.32. $f_0(t) = \cos \beta t$ para $0 \leqslant t < \frac{\pi}{2\beta}$, $l = \frac{\pi}{2\beta}$.

Empleando la tabla de representaciones y el teorema de retardo háliense los originales de $f(t)$ para las representaciones:

1.33. $F(p) = \frac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$.

1.34. $F(p) = \frac{1}{p-2} + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{3e^{-4p}}{p^2+9}$.

1.35. $F(p) = \frac{p}{p^2+4} - \frac{2pe^{-p}}{p^2-4} + \frac{e^{-3p}}{p^2-16}$.

2. Ampliación de la clase de originales. Se puede ampliar la clase de originales incluyendo las funciones, que pueden ser no acotadas en el entorno del conjunto finito de puntos, pero tales funciones, que la integral de Laplace de ellas converge, sin embargo, absolutamente en cierto semiplano $\operatorname{Re} p > \sigma_0$. Entre tales originales generalizados figuran la función potencial $f(t) = t^\mu$ para $\mu > -1$, la función $\ln t$ y otros. En particular, a esta clase pertenece toda función $f(t)$ que en ciertos puntos $t = t_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ es infinitamente grande de orden menor que uno, es decir, tal que $\lim_{t \to t_k} (t - t_k)^{r_k} f(t) = 0$ para cierto $r_k < 1$ y si fuera de algunos entornos de puntos t_k satisface las condiciones, para las cuales se puede considerar la función como original.

EJEMPLO 8. Hállese la representación $F(p)$ de la función $f(t) = t^\mu$, $\mu > -1$.

◀ Tenemos $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^\mu dt$ o, después de la sustitución $pt = \tau$,

$$F(p) = \frac{1}{p^{\mu+1}} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \tau^\mu d\tau = \frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}.$$

Así pues

$$\frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \doteqdot \frac{1}{p^{\mu+1}}. \blacktriangleright$$

OBSERVACIÓN. Si μ es un número positivo entero, entonces $\Gamma(\mu+1) = \mu!$ y llegamos a la fórmula 2 de la tabla de representaciones.

EJEMPLO 9. Hállese la representación de la función $f(t) = t^{\mu} \ln t$, $\mu > -1$.

◀ De la correspondencia $t^{\mu} \doteqdot \frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}$ con ayuda de la diferenciación por el parámetro μ obtenemos

$$t^{\mu} \ln t \doteqdot \frac{\Gamma'(\mu+1)}{p^{\mu+1}} - \frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}} \ln p =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}} \left(\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \ln p \right).$$

En particular, poniendo $\mu = 0$ y tomando en consideración que $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma'(1) = -\gamma$ ($\gamma = 0{,}577215\ldots$ es la *constante de Euler*) obtenemos

$$\ln t \doteqdot -\frac{\gamma + \ln p}{p}. \blacktriangleright$$

Hállense las representaciones de las funciones:

1.36. $f(t) = \frac{t^{\mu} e^{\alpha t}}{\Gamma(\mu+1)}$, $\mu > -1$.

1.37. $f(t) = \frac{t^{\mu} e^{\alpha t} \ln t}{\Gamma(\mu+1)}$, $\mu > -1$.

1.38. $f(t) = e^{\alpha t} \ln t$.

1.39. $f(t) = \frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \cos \beta t$, $\mu > -1$.

1.40. $f(t) = \frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \operatorname{sen} \beta t$, $\mu > -1$.

1.41. $f(t) = \cos \beta t \cdot \ln t$. **1.42.** $f(t) = \operatorname{sen} \beta t \cdot \ln t$.

1.43. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leqslant t < a, \\ \frac{1}{\sqrt{t-a}} & \text{para } t > a. \end{cases}$

§ 2. Fórmula de inversión. Teoremas del desarrollo

Si la función de la variable real $f(t)$ es original, es decir, $|f(t)| < Me^{(\sigma_0+\varepsilon)t}$ y $f(t)$ es suave a trozos en cada segmento finito del eje real, entonces la relación entre ella y su representación es biunívoca: de la igualdad

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

se deduce la fórmula de inversión

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp \quad (\textit{fórmula de Mellin}),$$

En esta fórmula el camino de integración es cualquier recta $\operatorname{Re} p = \sigma$, paralela al eje imaginario y situada más a la derecha que la recta $\operatorname{Re} p = \sigma_0$.

OBSERVACION. En todo punto t_0 que sea un punto de descontinuidad de la función $f(t)$, el segundo miembro de la fórmula de Mellin es igual a $\frac{1}{2}(f(t_0-0)+f(t_0+0))$.

Si la función $F(p)$, analítica en el semiplano $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, satisface las condiciones:

a) $|F(p)| \to 0$ para $|p| \to \infty$ uniformemente respecto a $\arg p \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

b) para todos los $\sigma > \sigma_0$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |F(x+iy)|\,dy \leqslant M,$$

entonces $F(p)$ es la representación del original que se determina por la fórmula de Mellin.

La aplicación directa de la fórmula de inversión resulta a menudo dificultosa y por lo general se emplean los teoremas del desarrollo que son corolarios de ella:

PRIMER TEOREMA DEL DESARROLLO. *Si la función $F(p)$ es analítica en cierto entorno de un punto infinitamente alejado y su desarrollo en serie de potencias de $\frac{1}{p}$ tiene la forma*

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}},$$

entonces la función

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad t \geqslant 0 \quad (f(t)=0 \text{ para } t<0)$$

es un original que tiene la representación $F(p)$.

SEGUNDO TEOREMA DEL DESARROLLO. *Si la representación* $F(p)$ *es una función uniforme y tiene sólo un número finito de puntos singulares* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *situados en la parte finita del plano, entonces*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[e^{pt} F(p);\ p_k\right].$$

Si, en particular, $F(p)=\dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, donde $P_m(p)$ y $Q_n(p)$ son polinomios de potencias m y n, respectivamente $(n>m)$, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son raíces del polinomio $Q_n(p)$ con multiplicidades iguales a $l_1, l_2, \ldots, l_r$ $(l_1+l_2+\ldots+l_r=n)$, respectivamente, entonces

$$f(t)=\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{(l_k-1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{l_k-1}}{dp^{l_k-1}} \left((p-p_k)^{l_k} F(p)\, e^{pt}\right). \qquad (1)$$

Si todos los coeficientes de los polinomios $P_m(p)$ y $Q_n(p)$ son números reales, entonces en el segundo miembro de (1) es útil reunir los sumandos pertenecientes a las raíces complejas conjugadas recíprocamente; la suma de cada par de tales términos es igual a la parte real duplicada de uno de ellos.

En el caso particular, cuando todas las raíces $p_1, p_2, \ldots, p_n$ del polinomio $Q_n(p)$ son simples, empleando la fórmula para calcular el residuo respecto al polo de primer orden (véase la pág. 000), obtendremos

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} \frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)} e^{p_k t}. \qquad (2)$$

EJEMPLO 1. Hállese el original de la función $F(p)=\dfrac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}$.

◀ Primer procedimiento. El desarrollo de la función $F(p)$ en el entorno del punto $p=\infty$ tiene la forma

$$F(p)=\frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}=\frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! p^n}=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! p^{n+1}}.$$

Por eso, en correspondencia con el primer teorema del desarrollo, el original para $F(p)$ es la función $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{t^n}{(n!)^2}=I_0(2\sqrt{t})$

(I_0 es la función de Besel de primer género con índice nulo).

Segundo procedimiento. Empleemos el segundo teorema del desarrollo. Con este fin hay que hallar el residuo de la función $\frac{1}{p}e^{pt}e^{-\frac{1}{p}}$ respecto a su único punto singular $p = 0$ (éste es un punto esencialmente singular), es decir, el coeficiente de $1/p$ del desarrollo de esta función en serie de Laurent en el entorno del punto $p = 0$. Tenemos

$$\frac{1}{p}\,e^{pt}e^{-\frac{1}{p}} = \left(1+pt+\frac{p^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{p^nt^n}{n!}+\ldots\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2!p^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!p^{n+1}}+\ldots\right).$$

Separando en el producto de las series los términos que contienen $1/p$, hallamos:

$$f(t) = \operatorname{res}\left[\frac{1}{p}\,e^{pt}e^{-\frac{1}{p}};\ 0\right] = 1-t+\frac{t^2}{(2!)^2}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\frac{t^n}{(n!)^2}+\ldots = I_0(2\sqrt{t}).\ \blacktriangleright$$

En este ejemplo, la solución que utiliza el primer teorema del desarrollo resultó ser más simple, que la solución con ayuda del segundo teorema del desarrollo.

EJEMPLO 2. Hállese el original para la función $F(p) = \frac{1}{(p^2+\beta^2)^3}$.

◀ Empleemos el segundo teorema del desarrollo. La función $F(p)$ tiene dos polos de tercer orden $p = \pm\beta i$ y su original se determina por la igualdad

$$f(t) = \operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\ \beta i\right]+\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\ -\beta i\right] =$$
$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\ \beta i\right]\right).$$

Tenemos:

$$\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\ \beta i\right] = \frac{1}{2!}\lim_{p\to\beta i}\frac{d^2}{dp^2}\left((p-\beta i)^3\,\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{p\to\beta i}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{(p+\beta i)^3}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{p\to\beta i}\left(\frac{t^2e^{pt}}{(t+\beta i)^3}-\frac{6te^{\beta t}}{(p+\beta i)^4}+\frac{12e^{pt}}{(t+\beta i)^5}\right) =$$
$$= -\frac{t^2e^{\beta it}}{16\beta^3 i}-\frac{3te^{\beta it}}{16\beta^4}+\frac{3e^{\beta it}}{16\beta^5 i}$$

(al diferenciar hicimos uso de la fórmula de Leibniz para la derivada del producto). Separando la parte real de esta expresión y duplicán-

dola, obtendremos

$$f(t)=-\frac{t^2\operatorname{sen}\beta t}{8\beta^3}-\frac{3t\cos\beta t}{8\beta^4}+\frac{3\operatorname{sen}\beta t}{8\beta^5}\ .\ \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Hállese el original para la función $F(p)=\dfrac{1}{p^4-1}$.

◀ Aquí el denominador de la fracción tiene sólo raíces simples $p_{1,2}=\pm 1$, $p_{3,4}=\pm i$. Por eso, en correspondencia con la fórmula (2) obtenemos

$$f(t)=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{4p_k^3}e^{p_k t}=\frac{1}{4}\left(e^t-e^{-t}+\frac{e^{it}}{i^3}+\frac{e^{-it}}{(-i)^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{e^t-e^{-t}}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t-\operatorname{sen}t).\ \blacktriangleright$$

Pudimos resolver este ejemplo partiendo del desarrollo

$$\frac{1}{p^4-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2-1}-\frac{1}{p^2+1}\right).$$

Empleando el primer teorema del desarrollo hállense los originales para las funciones dadas:

2.1. $F(p)=\dfrac{1}{p}\cos\dfrac{1}{p}$. **2.2.** $F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p}}\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{p}}$.

2.3. $F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{p}}$. **2.4.** $F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$.

2.5. $F(p)=\dfrac{1}{2p}\ln\dfrac{p+1}{p-1}$.

2.6. $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{\frac{1}{p^2}}$. **2.7*.** $F(p)=\dfrac{1}{p-1}e^{-\frac{1}{p-1}}$.

2.8. ¿Para qué funciones dadas en los problemas 2.1—2.7 se puede aplicar, en la determinación del original, el segundo teorema del desarrollo y para qué funciones no se puede?

Empleando el segundo teorema del desarrollo o desarrollando en fracciones elementales, hállense los originales para las funciones dadas:

2.9. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+4p+5}$.

2.10. $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

2.11. $F(p)=\dfrac{Q'(p)}{Q(p)}$ donde $Q(p)=(p-p_1)(p-p_2)\ldots$ $\ldots(p-p_n)$ y todos los números p_k son distintos dos a dos.

2.12. $F(p) = \frac{1}{(p^4-1)^2}$. 2.13. $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2(p^2-4)}$.

2.14. $F(p) = \frac{p^2}{(p^4-1)^2}$. 2.15. $F(p) = \frac{p^3}{p^6-1}$.

2.16. $F(p) = \frac{p^3}{(p^2+1)^3}$. 2.17. $F(p) = \frac{1}{p^2-4p+3}$.

2.18. $F(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p^2-1)^2}$. 2.19. $F(p) = \frac{p}{p^4-5p^2+4}$.

2.20. $F(p) = \frac{p^3}{(p^4-1)(p^4+4)}$.

§ 3. Aplicación del cálculo operacional para resolver las ecuaciones diferenciales

1. Resolución de las ecuaciones diferenciales lineales y de los sistemas de ecuaciones con coeficientes constantes. Para hallar la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t) \qquad (1)$$

(donde $f(t)$ es el original) que satisface las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0', \ \ldots, \ x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \qquad (2)$$

es conveniente aplicar a ambos miembros de esta ecuación la transformación de Laplace, es decir, pasar de la ecuación (1) con las condiciones (2) a la igualdad operacional

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) X(p) + Q(p) = F(p),$$

donde $X(p)$ es la representación de la solución buscada, $F(p)$ es la representación de la función $f(t)$ y $Q(p)$ es cierto polinomio cuyos coeficientes dependen de los datos iniciales $x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ y que es idénticamente igual a cero, si $x_0 = x_0' = \ldots = x_0^{(n-1)} = 0$. Resolviendo la ecuación operacional respecto a $X(p)$:

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}$$

($L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$ es un polinomio característico de la ecuación dada) y hallando el original para $X(p)$, obtendremos la solución buscada $x(t)$. Si consideramos $x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ constantes arbitrarias, la solución encontrada será la solución general de la ecuación (1). De modo análogo se resuelven los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. La diferencia consiste en que en vez de una ecuación operacional obtendremos un sistema de tales ecuaciones, que serán lineales respecto a las representaciones de las funciones buscadas.

EJEMPLO 1. Hállese la solución general de la ecuación $x'' + 2x' + x = te^{-t}$, así como su solución particular que satisface las condiciones iniciales $x_0 = 1$, $x_0' = 2$.

◀ Sea $x(t) \doteq X(p)$, entonces

$$x'(t) \doteq pX(p) - x_0, \quad x''(t) = p^2 X(p) - px_0 - x_0'.$$

Por la tabla de representaciones hallamos $te^{-t} \doteq \frac{1}{(p+1)^2}$ y la ecuación operacional tiene la forma

$$(p^2+2p+1)\,X(p)-(p+2)\,x_0-x_0'=\frac{1}{(p+1)^2}.$$

De aquí hallamos

$$X(p)=\frac{p+2}{(p+1)^2}\,x_0+\frac{1}{(p+1)^2}\,x_0'+\frac{1}{(p+1)^4}.$$

Para determinar el original en el caso dado lo más fácil es representar $X(p)$ en la forma siguiente:

$$X(p)=\frac{(p+1)+1}{(p+1)^2}\,x_0+\frac{1}{(p+1)^2}\,x_0'+\frac{1}{(p+1)^4}=$$

$$=\frac{1}{(p+1)^4}+\frac{x_0+x_0'}{(p+1)^2}+\frac{x_0}{p+1}.$$

Utilizando la tabla de representaciones, hallamos la solución general

$$x(t)=\frac{1}{3!}\,t^3e^{-t}+(x_0+x_0')\,te^{-t}+x_0e^{-t}.$$

Designando $x_0=C_1$, $x_0+x_0'=C_2$ podemos escribirla así:

$$x(t)=\frac{1}{3}\,t^3e^{-t}+(C_1+C_2t)\,e^{-t}.$$

La solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas es:

$$x(t)=\frac{1}{3}\,t^3e^{-t}+(1+3t)\,e^{-t}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Intégrese la ecuación $x''+x=f(t)$ para las condiciones iniciales nulas, si

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\,t & \text{para } 0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}\,(\pi-t) & \text{para } \dfrac{\pi}{2}\leqslant t<\pi,\\[2mm] 0 & \text{para } t\geqslant\pi.\end{cases}$$

◀ Anotemos $f(t)$ con ayuda de la función unitaria de Heaviside:

$$f(t)=\left(1-\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{2}{\pi}\,t-\left(\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\eta(t-\pi)\right)\times$$

$$\times\frac{2}{\pi}\,(t-\pi)=\frac{2}{\pi}\left(t-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\eta(t-\pi)\,(t-\pi)\right).$$

Valiéndose del teorema de retardo, de aquí hallamos

$$f(t)\doteq F(p)=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}}{p^2}.$$

Ya que las condiciones iniciales son nulas, entonces, suponiendo $x(t) \doteq X(p)$, llegamos a la ecuación operacional

$$(p^2+1)\,X(p) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}}{p^2},$$

a partir de la cual, después de las transformaciones elementales, hallamos

$$X(p) = \frac{2}{\pi}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}\right)\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}\right).$$

Puesto que $\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{p^2+1} \doteq t-\operatorname{sen} t$, entonces, aplicando de nuevo el teorema de retardo, hallamos

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\left((t-\operatorname{sen} t)-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\eta(t-\pi)\left((t-\pi)-\operatorname{sen}(t-\pi)\right)\right),$$

es decir,

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(t-\operatorname{sen} t) & \text{para } 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{2}{\pi}(-\operatorname{sen} t-2\cos t-t+\pi) & \text{para } \dfrac{\pi}{2} \leqslant t < \pi, \\ -\dfrac{4}{\pi}\cos t & \text{para } t \geqslant \pi. \end{cases} \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Hállese la solución del sistema

$$x' + y = e^t,$$
$$x + y' = e^{-t}$$

para las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

◀ Sean $x(t) \doteq X(p)$, $y(t) \doteq Y(p)$, entonces $x'(t) \doteq pX(p) - x_0$, $y'(t) \doteq pY(p) - y_0$ y obtenemos el sistema operacional

$$pX(p) - x_0 + Y(p) = \frac{1}{p-1},$$

$$pY(p) - y_0 + X(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Resolviendo el sistema, hallamos

$$X(p) = \frac{p}{p^2-1}x_0 - \frac{1}{p^2-1}y_0 + \frac{p^2+1}{(p^2-1)^2},$$

$$Y(p) = \frac{p}{p^2-1}y_0 + \frac{1-x_0}{p^2-1} - \frac{2p}{(p^2-1)^2}$$

y, por consiguiente,

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \operatorname{ch} t - y_0 \operatorname{sh} t + t \operatorname{ch} t, \\ y(t) = y_0 \operatorname{ch} t + (1-x_0)\operatorname{sh} t - t \operatorname{sh} t. \end{cases} \blacktriangleright$$

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales:

3.1. $x'' + 9x = \cos 3t$. **3.2.** $x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$.
3.3. $x'' + 2x' = te^{2t}$. **3.4.** $x'' + x' - 2x = e^t$.
3.5. $x'' + x' = e^{-t} \operatorname{sen} t$.

Hállense las soluciones de las ecuaciones diferenciales para las condiciones iniciales dadas:

3.6. $x''' + x = 0$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 2$.
3.7. $x'' + 2x' + x = e^{-t}$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
3.8. $x'' + 3x' = e^{-3t}$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
3.9. $x'' - 2x' + 2x = \operatorname{sen} t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
3.10. $x'' + 4x = \operatorname{sen} 2t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$.
3.11. $x'' - 9x = \operatorname{sh} t$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 3$.
3.12. $x''' - x'' = e^t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.
3.13. $x^{IV} - x = \operatorname{sh} t$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x'''(0) = 1$.
3.14. $x''' + 3x'' + 3x' + x = te^{-t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Hállense para las condiciones iniciales nulas las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

3.15. $x' + x = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leqslant t < 2, \\ 0 & \text{para } t \geqslant 2. \end{cases}$$

3.16. $x'' + x = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{para } 0 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{para } t \geqslant \pi. \end{cases}$$

3.17. $x'' - x' = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ 0 & \text{para } t \geqslant 1. \end{cases}$$

3.18. $x'' + x = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ -1 & \text{para } 1 \leqslant t < 2, \\ 0 & \text{para } t \geqslant 2. \end{cases}$$

3.19*. Resuélvase la ecuación integral $\int_0^t x(\tau)\,d\tau + x(t) = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ 2-t & \text{para } 1 \leqslant t < 2, \\ 0 & \text{para } t \geqslant 2. \end{cases}$$

3.20*. Con ayuda de la integral de Duhamelo demuéstrese la siguiente afirmación: si $x_1(t)$ es la solución de la ecuación $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 1$ para las condiciones iniciales nulas ($x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$), entonces la solución de la ecuación $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t)$ para las mismas condiciones iniciales es la función

$$x(t) = \int_0^t x'(\tau) f(t-\tau)\,d\tau = x_1(t) f(0) + \int_0^t f'(\tau) x_1(t-\tau)\,d\tau$$

($f(t)$ es un original arbitrario).

OBSERVACION. El resultado del problema 3.20 permite determinar la solución de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes para las condiciones iniciales nulas, sin hallar la representación del segundo miembro de esta ecuación.

Empleando el resultado del problema 3.20, hállense las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

3.21. $x' - x = \dfrac{1}{e^t + 3}$. **3.22.** $x'' + x = \dfrac{1}{1 + e^t}$.

3.23. $x'' - x' + \dfrac{1}{1 + e^t}$. **3.24.** $x'' + x = \dfrac{1}{2 + \cos t}$.

3.25. $x'' + x = e^{-t^2}$.

Hállense las soluciones generales de los sistemas de ecuaciones diferenciales:

3.26. $x'' + y' = t$, $y'' - x' = 0$. **3.27.** $x'' + y' = \operatorname{sh} t - \operatorname{sen} t$, $y'' + x' = \operatorname{ch} t - \cos t$.

Hállense las soluciones de los sistemas de las ecuaciones diferenciales para las condiciones iniciales dadas.

3.28. $x' + y = 0$, $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.
$+ y' = 0$;

3.29. $2x'' + x - y' = -3 \operatorname{sen} t$,
$x + y' = -\operatorname{sen} t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 0$.

3.30. $x'' - y' = 0$,
$x - y'' = 2 \operatorname{sen} t$;
$x(0) = -1$, $x'(0) - y(0) = y'(0) = 1$.

3.31. $x'' - y' = 0$,
$x' - y'' = 2 \cos t$;
$x(0) = y'(0) = 0$, $x'(0) = y(0) = 2$.

3.32. $x'' - y' = e^t$,
$x' + y'' - y = 0$;
$x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $x'(0) = y'(0) = 0$.

3.33. $x'' + y' = 2 \operatorname{sen} t$,
$y'' + z' = 2 \cos t$,
$z'' - x = 0$;
$x(0) + z(0) = y'(0) = 0$, $x'(0) - y(0) = -1$, $z'(0) = 1$.

Intégrense para las condiciones iniciales nulas los sistemas de ecuaciones diferenciales:

3.34. $x'' - y' = f_1(t)$,
$y' + x = f_2(t)$,

donde $f_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ para } 0 \leqslant t < \pi, \\ 0 \text{ para } t \geqslant \pi, \end{cases}$

$$f_2(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leqslant t < \pi/2, \\ \pi - t & \text{para } \pi/2 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{para } t \geqslant \pi. \end{cases}$$

3.35. $x'' - y = 0$,
$y'' - x = f(t)$,

donde $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ para } 0 \leqslant t < \pi, \\ -1 \text{ para } \pi \leqslant t < 2\pi, \\ 0 \text{ para } t \geqslant 2\pi. \end{cases}$

2. Cálculo de los circuitos eléctricos. Aplicando los métodos del cálculo operacional es cómodo resolver los problemas referentes al cálculo de los circuitos eléctricos.

EJEMPLO 4. Al circuito eléctrico en el cual están conectadas en serie la autoinducción L y la resistencia R, está aplicada una fuerza electromotriz periódica de período T: $u(t) = at$ $(0 \leqslant t < T)$ (fig. 112). Determínese la condición inicial $i(0) = i_0$ de tal modo, que en el circuito surja la corriente periódica.

◀ Según la segunda ley de Kirchhoff hallamos:

$$Li'(t) + Ri(t) = u(t) \quad \text{ó} \quad i'(t) + ki(t) = \frac{1}{L}u(t), \quad k = \frac{R}{L}.$$

Con ayuda de la función unitaria de Heaviside escribamos $u_0(t)$ (el valor de $u(t)$ en el período inicial $[0, T)$):

$$u_0(t) = (1 - \eta(t - T))\, at = at - a\eta(t - T)(t - T) - aT\eta(t - T)$$

De aquí por el teorema de retardo tenemos $u_0(t) \doteq U_0(p) = \frac{a(1 - e^{-pT})}{p^2} - \frac{aT}{p}e^{-pT}$. Aplicando la fórmula de la representación de la función periódica (véase el problema 1.25), hallamos

$$u(t) \doteq U(p) = \frac{U_0(p)}{1 - e^{-pT}} = \frac{a}{p^2} - \frac{aT}{p}\frac{e^{-pT}}{1 - e^{-pT}}.$$

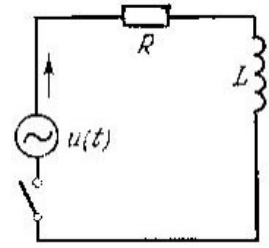


Fig. 112

Pasamos a la ecuación operacional poniendo $i(t) \doteq I(p)$, $i'(t) \doteq pI(p) - i_0$:

$$(p + k)\, I(p) = i_0 + \frac{a}{Lp^2} - \frac{aT}{Lp}\frac{e^{-pT}}{1 - e^{-pT}},$$

de donde

$$I(p) = \frac{i_0}{p + k} + \frac{a}{Lp^2(a + k)} - \frac{aT}{Lp(p + k)}\frac{e^{-pT}}{1 - e^{-pT}}.$$

Anotemos $I(p)$ en la forma siguiente:

$$I(p) = \frac{F(p)}{1 - e^{-pT}}, \text{ donde } F(p) = \frac{i_0(1 - e^{-pT})}{p + k} + \frac{a(1 - e^{-pT})}{Lp^2(p + k)} - \frac{aTe^{-pT}}{Lp(p + k)}.$$

Para que la corriente en el circuito sea periódica, con un período T, es necesario que el original de la función $F(p) \doteq f(t)$ tenga la forma

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t) & \text{para } 0 \leqslant t < T, \\ 0 & \text{para } t \geqslant T. \end{cases}$$

Pero para $0 \leqslant t < T$

$$f_0(t) \doteq \frac{i_0}{p + k} + \frac{a}{Lp^2(p + k)}.$$

Ya que

$$\frac{1}{p^2(p + k)} = \frac{1}{kp^2} + \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{p + k} - \frac{1}{p}\right) = \frac{t}{k} + \frac{1}{k^2}(e^{-kt} - 1),$$

entonces

$$f_0(t) = i_0 e^{-kt} + \frac{at}{Lk} + \frac{a}{Lk^2}(e^{-kt} - 1).$$

Para $t \geqslant T$, valiéndose del teorema de retardo, hallamos:

$$f(t) = i_0(e^{-kt} - e^{-k(t-T)}) + \frac{a(t-(t-T))}{Lk} +$$

$$+ \frac{a}{Lk^2}((e^{-kt} - 1) - (e^{-k(t-T)} - 1)) - \frac{aT}{Lk}(1 - e^{-k(t-T)}) =$$

$$= e^{-kt}\left(i_0(1 - e^{kT}) + \frac{a}{Lk^2}(1 - e^{kT}) + \frac{aT}{Lk}e^{kT}\right).$$

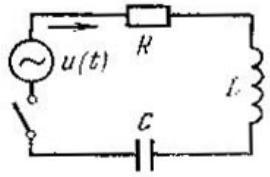


Fig. 113

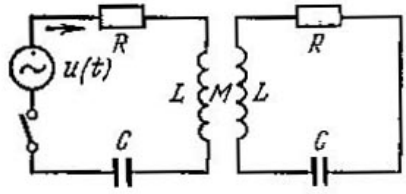


Fig. 114

Pero aquí $f(t) = 0$, por eso

$$i_0 = -\frac{a}{Lk^2}\frac{kTe^{kT} + 1 - e^{kT}}{1 - e^{kT}} = -\frac{a}{kL^2} + \frac{1}{Lk}\frac{aT}{1 - e^{-kT}}.$$

De este modo, sustituyendo el valor de i_0 en $f_0(t)$, hallamos:

$$f_0(t) = \frac{a}{Lk^2}\left(\frac{kTe^{-kt}}{1 - e^{-kT}} - e^{-kt} + kt + e^{-kt} - 1\right) =$$

$$= \frac{aT}{Lk}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{kT} + \frac{e^{-kt}}{1 - e^{-kT}}\right).$$

Este es el valor buscado de la corriente periódica (del período T) en el intervalo $0 \leqslant t < T$. ▶

3.36. Al circuito eléctrico en el cual están conectadas en serie la autoinducción L, la resistencia R y la capacidad C con corriente inicial y carga iguales a cero, está aplicada la fuerza electromotriz $u(t)$ igual a E_1 para $0 \leqslant t \leqslant T$ y E_2 para $t > T$ (E_1, E_2, T son constantes). Hállese la corriente en el circuito (fig. 113).

3.37. Dos circuitos eléctricos iguales que constan de una autoinducción L, una resistencia R y una capacidad C, conectadas en serie, están acoplados por la inducción mu-

tua M. Las corrientes y cargas iniciales son nulas. A uno de los circuitos en el momento de tiempo $t = 0$ se aplica la f.e.m. constante E_0. Hállense las corrientes en ambos circuitos (fig. 114).

3. Integración de las ecuaciones lineales en derivadas parciales. Analicemos la aplicación de los métodos operacionales para integrar las ecuaciones lineales en derivadas parciales a base de un ejemplo.

EJEMPLO 5. Hállese la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + z = \operatorname{sen} x \cos y$ que satisface las condiciones $z(0, y) = \operatorname{sen} y$, $z(x, 0) = 0$ $(x \in [0, +\infty)$, $y \in [0, +\infty))$.

◀ Pasemos a la ecuación operacional respecto al argumento y, poniendo $z(x, y) \doteqdot Z(x, p)$. De aquí

$$\frac{\partial z}{\partial y} \doteqdot pZ(x, p) - z(x, 0) = pZ(x, p),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \doteqdot \frac{\partial}{\partial x}(pZ(x, p)) = pZ'_x(x, p)$$

(según el teorema sobre la diferenciación de las relaciones operacionales por el parámetro). Obtenemos la ecuación operacional:

$$pZ'_x(x, p) + Z(x, p) = \frac{p \operatorname{sen} x}{p^2+1} \left(\text{ya que } \cos y \doteqdot \frac{p}{p^2+1} \right).$$

Integrando la ecuación diferencial obtenida respecto al argumento x, hallamos

$$Z(x, p) = C_1(p)\, e^{-\frac{x}{p}} + \frac{p}{(p^2+1)^2} \operatorname{sen} x - \frac{p^2}{(p^2+1)^2} \cos x.$$

En virtud de la condición inicial $Z(x, 0) = 0$ y del teorema de conexión del valor inicial del original con el valor final de la representación, debemos tener $\lim_{p \to \infty} pZ(x, p) = Z(x, 0) = 0$, de donde hallamos $\lim_{p \to \infty} pC_1(p) = 0$, además, si $C_1(p) \doteqdot \varphi(y)$, entonces $\varphi(0) = 0$ (en virtud del mismo teorema). Anotemos ahora $Z(x, p)$ en la forma siguiente:

$$Z(x, p) = pC_1(p) \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{p}} + \frac{p}{(p^2+1)^2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \times$$

$$\times \frac{(p^2+1)(p^2-1)}{(p^2+1)^2} \cos x.$$

Pero, como

$$pC_1(p) \doteqdot \varphi'(y), \quad \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{p}} \doteqdot I_0(2\sqrt{xy})$$

(véase la solución del ejemplo 1 del § 2).

$$\frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{2} y \operatorname{sen} y, \quad \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} = y \operatorname{sen} y,$$

entonces hallamos:

$$z(x, y) = \int_0^y \varphi'(t) I_0\left(2\sqrt{x(y-t)}\right) dt + \frac{1}{2} y \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x -$$

$$- \frac{1}{2} (\operatorname{sen} y + y \cos y) \cos x = \int_0^y \varphi'(t) I_0\left(2\sqrt{x(y-t)}\right) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \operatorname{sen} y \cos x - \frac{1}{2} y \cos(x+y)$$

(el primer sumando se obtuvo por el teorema de convolución de los originales). Ya que $I_0(0) = 1$, entonces, poniendo $x = 0$, hallamos:

$$z(0, y) = \int_0^y \varphi'(t) dt - \frac{1}{2} \operatorname{sen} y - \frac{1}{2} y \cos y =$$

$$= \varphi(y) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} y - \frac{1}{2} y \cos y = \operatorname{sen} y$$

(según las condiciones iniciales); por eso $\varphi(y) = \frac{3}{2} \operatorname{sen} y + \frac{1}{2} y \cos y$,

$\varphi'(t) = 2 \cos y - \frac{1}{2} y \operatorname{sen} y$, y hallamos definitivamente

$$z(x, y) = \int_0^y \left(2 \cos t - \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t\right) I_0\left(2\sqrt{x(y-t)}\right) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \operatorname{sen} y \cos x - \frac{1}{2} y \cos(x+y). \blacktriangleright$$

Intégrense las siguientes ecuaciones lineales en derivadas parciales:

3.38. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial z}{\partial y} + z = \cos x$; $z(0, y) = y$, $z'_x(0, y) = 0$.

3.39. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial z}{\partial y} - a^2 z = f(x)$; $z(0, y) = -y$, $z'_x(0, y) = 0$.

§ 4. Funciones impulsivas

1. Función impulsiva de primer orden $\delta(t)$. Definamos la *δ-función de Dirac* como límite para $h \to 0$ de la función

$$\delta_h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h} & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant h, \\ 0 & \text{para } -\infty < t < 0 \text{ y } h < t < +\infty \end{cases} \tag{1}$$

(fig. 115). El efecto sumario de la acción de esta función, llamado también su *intensidad*, es igual a la unidad, es decir,

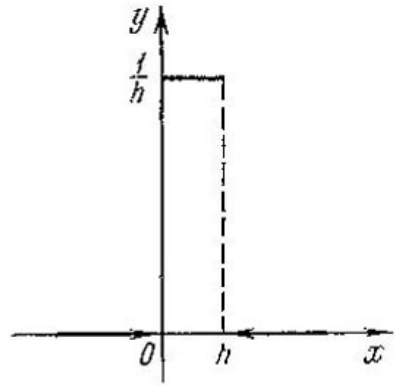


Fig. 115

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t)\, dt = 1.$$

Ponemos

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \delta_h(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq 0, \\ +\infty & \text{para } t = 0, \end{cases}$$

además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

Se puede determinar la δ-función también con ayuda del límite para $h \to 0$ de la función

$$\delta_h^*(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{h^2}(t-h) & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant h, \\ 0 & \text{para } h < t < +\infty, \\ \delta_h^*(-t) & \text{para } -\infty < t < 0 \end{cases} \tag{2}$$

(fig. 116) para la cual se verifica también

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h^*(t)\,dt = 1.$$

Las propiedades de la función impulsiva $\delta(t)$ son:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau).$

2. $\int_{a}^{T} \delta(t)\,dt = \eta(T) - \eta(a).$

Aquí $\eta(t)$ es la función unitaria de Heaviside, considerada como el

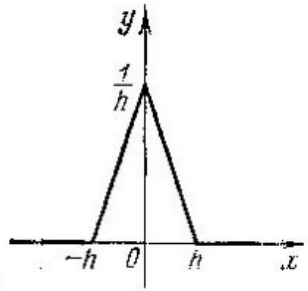


Fig. 116

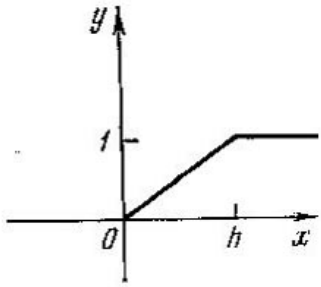


Fig. 117

límite para $h \to 0$ de la función $\eta_h(t)$, donde

$$\eta_h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}t & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant h, \\ 1 & \text{para } h < t < +\infty, \\ 0 & \text{para } -\infty < t < 0 \end{cases}$$

(fig. 117). En este sentido podemos considerar, que $\delta(t) = \eta'(t)$.

3. $\delta(-t) = \delta(t)$.

4. $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\,\delta(t)$.

5. Si $f(t) = 0$ para $t = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y $f'(a_k) \neq 0$ (todas las raíces de $f(t)$ son simples), entonces

$$\delta(f(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(t-a_k)}{|f'(a_k)|}.$$

2. Función impulsiva de segundo orden $\delta_1(t)$. La función $\delta_1(t)$ puede ser determinada como límite para $h \to 0$ de la derivada de la función $\delta_h^*(t-h)$ determinada en (2), es decir,

$$\delta_{1,h}^*(t) = (\delta_h^*(t-h))' = \begin{cases} \dfrac{1}{h^2} & \text{para } 0 \leqslant t < h, \\ -\dfrac{1}{h^2} & \text{para } h \leqslant t < 2h, \\ 0 & \text{para } -\infty < t < 0 \text{ y } 2h \leqslant t < +\infty; \end{cases}$$

$\delta_1(t)$ satisface las condiciones:

1. $\delta_1(t) = 0$ para $t \neq 0$.
2. $\delta_1(-0) = +\infty$, $\delta_1(+0) = -\infty$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{t} \delta_1(\tau)\,d\tau = \delta(t)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(t)\,dt = 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{t} \delta_1(\tau)\,d\tau = 1$.

3. Representaciones de las funciones impulsivas y sus aplicaciones. Por representación de la función $\delta(t)$ se comprenderá el límite de la representación bien de la función $\delta_h(t)$, o bien de la función $\delta_h^*(t-h)$ para $h \to 0$. En el primer caso la representación para $\delta_h'(t)$ se halla directamente, en el segundo caso la representación para $\delta_h^*(t-h)$ se halla a partir de la representación de su derivada $(\delta_h^*(t-h))_t' = \delta_{1,h}(t)$. De hecho tenemos

$$\delta_h(t) = \frac{\eta(t) - \eta(t-h)}{h}$$

y

$$\delta_{1,h}(t) = (\delta_h^*(t-h)_t' = \frac{\eta(t) - 2\eta(t-h) + \eta(t-2h)}{h^2}.$$

Por eso,

$$\delta_h(t) \doteq \frac{1}{h}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-ph}\right) = \frac{1-e^{-ph}}{ph}$$

y

$$\delta_{1,h}(t) \doteq \frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{2e^{-ph}}{p} + \frac{e^{-2ph}}{p}\right) = \frac{(1-e^{-ph})^2}{ph^2}.$$

De estas expresiones hallamos que

$$\delta(t) \doteq \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-ph}}{ph} = 1$$

y

$$\delta_1(t) \doteq \lim_{h\to 0} \frac{(1-e^{-ph})^2}{ph^2} = p.$$

Citemos ejemplos de aplicación de las funciones impulsivas.

EJEMPLO 1. Intégrese la ecuación $x''(t)=\delta(t)$ para las condiciones iniciales nulas. Explíquese el resultado.

◀ Formamos la ecuación operacional $p^2X(p)=1$, de donde $X(p)=\frac{1}{p^2}$ y $x(t)=t$. Así pues, la función impulsiva de primer orden comunica al punto material de la masa unidad el movimiento rectilíneo uniforme con velocidad unitaria. ▶

EJEMPLO 2. Intégrese la ecuación $x''(t)=\delta_1(t)$ para las condiciones iniciales nulas.

◀ Formamos la ecuación operacional $p^2X(p)=p$, de donde $X(p)=\frac{1}{p}$ y $x(t)=1$ $(t>0)$. De este modo, la función impulsiva de segundo orden comunica al punto material de la masa unidad un desplazamiento instantáneo en una unidad de longitud sin movimiento posterior. ▶

Intégrense las siguientes ecuaciones diferenciales:

4.1. $x''+\omega^2x=v_0\delta(t)$ para las condiciones iniciales nulas.

4.2. $x''+\omega^2x=v_1\delta(t-\tau)+h\delta_1(t-\tau_1)$; $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_0'$.

4.3. $x''+\omega^2x=A\operatorname{sen}\omega t+B\cos\omega t\cdot\delta(t-\tau)$ para las condiciones iniciales arbitrarias.

4.4.** $x''=v_0\delta(\operatorname{sen}\omega t)$ para las condiciones iniciales nulas.

§ 5. Aplicaciones del cálculo operacional a la resolución de las ecuaciones integrales e integrales diferenciales, al cálculo de las integrales impropias y a la sumación de las series

1. Resolución de las ecuaciones integrales e integrales diferenciales. Aplicando el teorema de convolución es fácil hallar las representaciones de las soluciones de las ecuaciones integrales de Volterra de primera y segunda especie (y en los casos más simples, con ayuda de la representación encontrada, también se puede hallar la propia solución), cuando de núcleo en la ecuación correspondiente sirve la función de tipo $K(t-\tau)$, donde $K(t)$ es el original. Este método es aplicable también a las ecuaciones integrales diferenciales con el mismo núcleo.

EJEMPLO 1. Hállese la solución de *la ecuación de Volterra* de primera especie

$$\int_0^t \cos(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau=t\cos t.$$

◀ Sea $x(t) \doteq X(p)$; ya que

$$\cos t \doteq \frac{p}{p^2+1}, \quad t\cos t \doteq \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2},$$

$$\int_0^t \cos(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \doteq \frac{pX(p)}{p^2+1}$$

(según el teorema de convolución), entonces llegamos a la ecuación operacional

$$\frac{pX(p)}{p^2+1} = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2},$$

de donde

$$X(p)\frac{p^2-1}{p(p^2+1)} = \frac{2p}{p^2+1} - \frac{1}{p}.$$

De este modo, $x(t) = 2\cos t - 1$. ▶

EJEMPLO 2. Hállese la solución de la ecuación $x'' + x = \operatorname{sen} t + \int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$ para las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

◀ Suponiendo $x(t) \doteq X(p)$, tenemos

$$x''(t) \doteq p^2X(p) - 1, \quad \operatorname{sen} t \doteq \frac{1}{p^2+1},$$

$$\int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \doteq \frac{X(p)}{p^2+1}.$$

Obtenemos la ecuación operacional

$$(p^2+1)X(p) - 1 = \frac{1}{p^2+1} + \frac{X(p)}{p^2+1}$$

ó

$$((p^2+1)^2 - 1)X(p) = p^2 + 2.$$

De aquí hallamos $X(p) = \frac{1}{p^2}$ y $x(t) = t$. ▶

Resuélvanse las siguientes ecuaciones integrales e integrales diferenciales:

5.1. $\int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \operatorname{ch} t - \cos t.$

5.2. $3\int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x(t) - e^{-t}.$

5.3. $\int_0^t e^{t-\tau} \operatorname{sen}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x'' - x' + e^t(1-\cos t)$;

$x(0) = x'(0) = 1$.

5.4. $\int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x'' - x' + \frac{1}{2} t \operatorname{sh} t$; $x(0) = 1$,

$x'(0) = 0$.

Intégrense *las ecuaciones de Abel*:

5.5. $\int_0^t \frac{x(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \pi$.

5.6. $\int_0^t \frac{x(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = t^{\beta}$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $\beta > -1$.

2. Cálculo de las integrales impropias. Uno de los procedimientos para calcular las integrales impropias del tipo $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ está basado en la aplicación del teorema del cálculo operacional sobre la conexión del valor «final» del original y el valor «inicial» de la representación: si $\varphi(t) \doteqdot \Phi(p)$ y existe el límite finito $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty)$, entonces $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty) = \lim_{p \to 0} p\Phi(p)$ (véase el § 1, la propiedad 12, b)).

A partir de este teorema y de la relación

$$\int_0^t f(t)\, dt = \frac{1}{p} F(p) \qquad (f(t) \doteqdot F(p)),$$

si la integral $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, se deduce la relación

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = F(0). \tag{1}$$

EJEMPLO 3. Calcúlese la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$.

◀ Ya que $\operatorname{sen} t \doteq \dfrac{1}{p^2+1}$, entonces según el teorema de la integración de la representación tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dq}{q^2+1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p,$$

por eso, según la fórmula (1), hallamos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t\, dt}{t} = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Sean las funciones $f(t, u)$ y $\psi(t) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\, du$ los originales y $f(t, u) \doteq F(p, u)$. Entonces, aplicando el teorema sobre la integración según el parámetro tendremos

$$\psi(t) \doteq \Psi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) F(p, u)\, du.$$

Por eso, si se puede calcular la integral que determina $\Psi(p)$, entonces para determinar la integral $\int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\, du$ es suficiente hallar el original para $\Psi(p)$, es decir,

$$\int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\, du \doteq \int_0^{+\infty} \varphi(u) F(p, u)\, du. \qquad (2)$$

EJEMPLO 4. Calcúlese la integral $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos tu\, du}{\alpha^2 + u^2}$.

◀ Tenemos $\cos tu \doteq \dfrac{p}{p^2+u^2}$. Por eso (por la fórmula (2))

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\, du}{\alpha^2+u^2} \doteq \int_0^{+\infty} \frac{p\, du}{(p^2+u^2)(\alpha^2+u^2)} = \frac{p}{p^2-\alpha^2} \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \left(\frac{du}{\alpha^2+u^2} - \frac{du}{p^2+u^2} \right) = \frac{p}{p^2-\alpha^2} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p} \right) = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{1}{p+\alpha}.$$

Pero $\frac{1}{p+\alpha} \doteqdot e^{-\alpha t}$. De aquí

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\, du}{\alpha^2 + u^2} = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha t}. \blacktriangleright$$

Un procedimiento más de cálculo de las integrales impropias mediante el cálculo operacional nos da el

TEOREMA DE PARSEVAL. *Si* $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$ *y las funciones* $F_1(p)$ $F_2(p)$ *son analíticas para* $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, *entonces*

$$\int_0^{+\infty} f_1(u) F_2(u)\, du = \int_0^{+\infty} F_1(v) f_2(v)\, dv. \qquad (3)$$

En este caso de la convergencia de una de estas integrales se desprende la convergencia de la otra [1]).

EJEMPLO 5. Calcúlese $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \operatorname{sen} \beta u}{u} du$, $\alpha > 0$.

◀ Tenemos $e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \doteqdot \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$, $\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}$. Poniendo $f_1(u) = e^{-\alpha u} \operatorname{sen} \beta u$, $F_2(u) = \frac{1}{u}$, tenemos

$$F_1(v) = \frac{\beta}{(v+\alpha)^2+\beta^2}, \quad f_2(v) = \eta(v).$$

Por eso según la fórmula (3)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \operatorname{sen} \beta u\, du}{u} = \int_0^{+\infty} \frac{\beta \eta(v)\, dv}{(v+\alpha)^2+\beta^2} = \beta \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(v+\alpha)^2+\beta^2}$$

($\eta(v) = 1$, ya que $v > 0$). Pero

$$\beta \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(v+\alpha)^2+\beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{v+\alpha}{\beta}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

De este modo

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \operatorname{sen} \beta u\, du}{u} = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \blacktriangleright$$

[1]) Si para una de las funciones $F_1(p)$ o $F_2(p)$ la condición de la analiticidad se cumple sólo para $\operatorname{Re} p > 0$, entonces la convergencia de una de las integrales puede no tener lugar.

Calcúlense las integrales impropias empleando la fórmula (1):

5.7. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \cos \gamma t}{t}\, dt,\ \alpha,\ \beta > 0.$

5.8*. $\int_0^{+\infty} t^{\mu} e^{-\alpha t} \ln t\, dt,\ \alpha > 0,\ \mu > -1.$

Calcúlense las integrales impropias, empleando la fórmula (2):

5.9. $\int_0^{+\infty} \frac{u \operatorname{sen} tu\, du}{u^2 + \alpha^2}$. 5.10. $\int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du.$

Calcúlense las integrales impropias empleando el teorema de Parseval (fórmula (3)):

5.11. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{\sqrt{u}}\, du,\ \alpha,\ \beta > 0.$

5.12. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha u - \operatorname{sen} \beta u}{u \sqrt{u}}\, du,\ \alpha,\ \beta > 0.$

5.13*. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\, dx,\ \alpha,\ \beta > 0.$

3. Sumación de las series. Los métodos de cálculo operacional pueden ser aplicados sumando las series numéricas y funcionales.

EJEMPLO 6. Sea $f(t) \doteqdot F(p)$ (la región de analiticidad $F(p)$ es $\operatorname{Re} p \geqslant k$). Demuéstrese que la suma S de la serie $\sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n)$ puede ser hallada según la fórmula

$$S = (\pm 1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t)\, dt}{1 \pm e^{-t}}. \qquad (4)$$

◀ Según la condición $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$. Tenemos:

$\frac{(\pm 1)^k e^{-kt}}{1 \pm e^{-t}} = \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}$. Por eso

$$(\pm)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t)\,dt}{1 \pm e^{-t}} = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}\,dt =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\,dt = \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n). \blacktriangleright$$

Empleando la fórmula (4) hállense las sumas de las siguientes series numéricas:

5.14.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)^2}$.

5.15.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}$.

5.16*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$

5.17*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{3}{n^2+3n+1}$.

EJEMPLO 7. Sea $f(t) \doteqdot F(p)$ (la región de analiticidad de $F(p)$ es $\operatorname{Re} p > 0$). Sea, además, $\Phi(t, x)$ la función generadora de la sucesión infinita de las funciones $\varphi_n(x)$, es decir,

$$\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\, t^n.$$

Demuéstrese que la suma $S(x)$ de la serie funcional $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F(n) \times \varphi_n(x)$ convergente en $[a, b]$, puede ser hallada según la fórmula

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x) f(t)\,dt. \tag{5}$$

◀ Tenemos

$$\int_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x) f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) e^{-nt}\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) F(n) = S(x). \blacktriangleright$$

Empleando la fórmula (5), con ayuda de la función generadora adecuada súmense las siguientes series:

5.18*. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

5.19*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

5.20**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$, $x \in (0, \pi)$.

5.21*. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n}$, $x \in (0, \pi)$

§ 6. Transformación discreta de Laplace y su aplicación

1. Transformación Z y transformación discreta de Laplace. Se llama *transformación Z* de la sucesión infinita numérica (real o compleja) (a_n), la función de la variable compleja $F(z)$ que se determina del modo siguiente:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}. \tag{1}$$

Si la sucesión (a_n) satisface la condición $|a_n| \leqslant Me^{\alpha n}$ ($M > 0$, α son constantes), la función $F(z)$ será analítica en la región $|z| > e^{\alpha}$, es decir, fuera del círculo con el centro en el punto nulo y de radio $R = e^{\alpha}$.

La fórmula (1) nos da el desarrollo de $F(z)$ en serie de Laurent en el entorno del punto infinitamente alejado (que es un punto regular de $F(z)$), por eso, para restablecer la sucesión (a_n) a partir de su transformación Z, hay que desarrollar de cualquier modo $F(z)$, en serie de Laurent, en el entorno del punto infinitamente alejado; en particular, se puede emplear la fórmula para determinar los coeficientes de este desarrollo (véase la fórmula (2) del § 5 del cap. 12)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} dz \tag{2}$$

(C es el contorno dentro del cual se encuentran todos los puntos singulares de la función $F(z)$ [1]).

---

[1]) La fórmula (2) es de hecho la fórmula de inversión de la transformación Z.

EJEMPLO 1. Restablézcase (a_n) a partir de su transformación Z, $F(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$.

◀ Tenemos $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)} = \dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{z-a} - \dfrac{1}{z-b}\right) =$

$= \dfrac{1}{(a-b)z}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{z}} - \dfrac{1}{1-\dfrac{b}{z}}\right) = \dfrac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n-b^n}{z^{n+1}}$. Así pues, $(a_n) = \left(\dfrac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}\right)$ para, $n \geqslant 1$, $a_0 = 0$. ▶

Introduzcamos en vez de la sucesión (a_n) la función reticular $f(n)$, suponiendo que $a_n = f(n)$. Como antes, $f(n)$ satisface la condición $|f(n)| < Mc^{\alpha n}$ y pongamos adicionalmente que $f(n) = 0$ para $n < 0$: a tales funciones reticulares las llamaremos *originales discretos*. *La transformación discreta de Laplace* de la función $f(n)$ la obtendremos, si en la transformación Z ponemos $z = e^q$:

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, e^{-nq}. \tag{3}$$

La conexión entre el original discreto $f(n)$ y su representación $F^*(q)$ se denota por el símbolo $f(n) \doteq F^*(q)$ (a veces se escribe $F^*(q) = D[f(n)]$. La representación $F^*(q)$ es la función de la variable compleja con período $2\pi i$, además en la franja principal, $\pi < \operatorname{Im} q \leqslant \pi$, es analítica para $\operatorname{Re} q > \alpha$. Así pues, todos sus puntos singulares están situados en esta franja a la izquierda de la recta $\operatorname{Re} q = \alpha$.

De la fórmula (3) se deduce la siguiente fórmula de inversión de la transformación discreta de Laplace:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-\pi i}^{\gamma+\pi i} F^*(q)\, e^{nq}\, dq. \tag{4}$$

EJEMPLO 2. $f(n) = a^n$, hállese $F^*(q)$.

◀ Tenemos $F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-nq} = \dfrac{1}{1-ae^{-q}} = \dfrac{e^q}{e^q-a}$ y por eso $a^n \doteq \dfrac{e^q}{e^q-a}$. Poniendo $a=1$, obtendremos $1^n = \eta(n) \doteq \dfrac{e^q}{e^q-1}$. ▶

Las propiedades de la transformación discreta de Laplace (en todos los casos que siguen se supone $f_j(n) \doteq F_j^*(q)$) son:

1. Linealidad:

$$\sum_{j=1}^{r} C_j f_j(n) \doteq \sum_{j=1}^{r} C_j F_j^*(q).$$

2. Fórmula de desplazamiento:

$$e^{\alpha n} f(n) \doteq F^*(q-\alpha).$$

3. Fórmula de retardo y de adelanto:

a) $f(n-k) \doteq e^{-kq} F^*(q)$,

b) $f(n+k) \doteq e^{kq}\left(F^*(q) - \sum_{r=0}^{k-1} f(r)\, e^{-rq}\right)$.

4. Diferenciación por el parámetro:

si $f(n, x) \doteq F^*(q, x)$, entonces $\frac{\partial f(n, x)}{\partial x} \doteq \frac{\partial F^*(q, x)}{\partial x}$.

5. Diferenciación e integración de la representación:

a) $n^k f(n) \doteq (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} F^*(q)$.

b) $\frac{f(n)}{n} \doteq \int_q^\infty (F^*(s) - f(0))\, ds \quad (n \neq 0)$.

6. Representación de las diferencias finitas del original:

$$\Delta^k f(n) \doteq (e^q - 1)^k F^*(q) - e^{kq} \sum_{r=0}^{k-1} (e^q - 1)^{k-r} \Delta^r f(0).$$

7. Representación de las sumas finitas del original:

si $g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$, entonces $g(n) \doteq \frac{F^*(q)}{e^q - 1}$.

8. Multiplicación de las representaciones: si

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{r=0}^{n} f_1(r)\, f_2(n-r)$$

(ésta es la así llamada «convolución» de los originales), entonces

$$f_1(n) * f_2(n) \doteq F_1^*(q)\, F_2^*(q).$$

Damos, a continuación *la tabla de representaciones* de las funciones de reticulares principales:

N	$f(n)$	$F^*(q)$
1	$\delta(n)$ $\begin{cases} C, & n=0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	C
2	$\eta(n)$ $\begin{cases} 1, & n \geqslant 0, \\ 0, & n<0 \end{cases}$	$\dfrac{e^q}{e^q-1}$
3	a^n	$\dfrac{e^q}{e^q-a}$
4	$e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^q}{e^q-e^\alpha}$
5	n	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^2}$
6	n^2	$\dfrac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^3}$
7	$\dfrac{n^{[2]}}{2!} = \dfrac{n(n-1)}{2} = C_n^2$	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^3}$
8	$\dfrac{n^{[k]}}{k!} \quad \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = C_n^k$	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^{k+1}}$
9	$\operatorname{sen} \beta n$	$\dfrac{e^q \operatorname{sen} \beta}{e^{2q}-2e^q \cos \beta+1}$
10	$\cos \beta n$	$\dfrac{e^q(e^q-\cos \beta)}{e^{2q}-2e^q \cos \beta+1}$
11	$\operatorname{sh} \beta n$	$\dfrac{e^q \operatorname{sh} \beta}{e^{2q}-2e^q \operatorname{ch} \beta+1}$
12	$\operatorname{ch} \beta n$	$\dfrac{e^q(e^q-\operatorname{ch} \beta)}{e^{2q}-2e^q \operatorname{ch} \beta+1}$
13	$\dfrac{n^{[k]}}{k!} e^{\alpha n} = C_n^k e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^{q+k\alpha}}{(e^q-e^\alpha)^{k+1}}$
13′	$\dfrac{n^{[k]}}{k!} a^n = C_n^k a^n$	$\dfrac{a^k e^q}{(e^q-a)^{k+1}}$

EJEMPLO 3. Hállese la representación de la función $f(n) = e^{\alpha n} \operatorname{sen} \beta n$.

◀ Aplicando el teorema de desplazamiento (propiedad 2) y empleando la fórmula 9 de la tabla de representaciones hallamos

$$e^{\alpha n} \operatorname{sen} \beta n \doteq F(q-\alpha) = \frac{e^{q-\alpha} \operatorname{sen} \beta}{e^{2(q-\alpha)} - 2e^{q-\alpha} \cos \beta + 1} =$$

$$= \frac{e^{q+\alpha} \operatorname{sen} \beta}{e^{2q} - 2e^{q+\alpha} \cos \beta - e^{2\alpha}}. \text{ En particular,}$$

$$a^n \operatorname{sen} \beta n = e^{n \ln a} \operatorname{sen} \beta n \doteq \frac{a e^q \operatorname{sen} \beta}{e^{2q} - 2ae^q \cos \beta + a^2} \cdot \blacktriangleright$$

Hállense las representaciones de las siguientes funciones reticulares:

6.1. $f(n) = e^{\alpha n} \cos \beta n$. **6.2.** $f(n) = a^n \cos \beta n$.

6.3. $f(n) = n^2 e^{\alpha n}$. **6.4.** $f(n) = n^2 a^n$.

6.5*. $f(n) = \frac{(n-1)^{[k]}}{k!} = C_{n-1}^k$.

6.6*. $f(n) = \frac{(n+m)^{[k]}}{k!} = C_{n+m}^k$.

6.7.** $f(n) = \frac{\operatorname{sen} \beta n}{n}$.

EJEMPLO 4. Hállese la función reticular $f(n)$ a partir de su representación $F^*(q) = \frac{e^q}{(e^{2q}-9)^2}$.

◀ Primer procedimiento. Desarrollemos $\frac{F^*(q)}{e^q} = \frac{1}{(e^{2q}-9)^2}$ en fracciones elementales, poniendo $e^q = z$:

$$\frac{1}{(z^2-9)^2} = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{(z-3)^2} + \frac{1}{(z+3)^2}\right) - \frac{1}{108}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+3}\right).$$

De este modo,

$$\frac{e^{2q}}{(e^{2q}-9)^2} = \frac{1}{108}\left(\frac{3e^q}{(e^q-3)^2} + \frac{3e^q}{(e^q+3)^2} - \frac{e^q}{e^q-3} + \frac{e^q}{e^q+3}\right).$$

Pero según las fórmulas 3 y 13' de la tabla de representaciones tenemos:

$$\frac{e^q}{e^q-3} \doteq 3^n, \quad \frac{e^q}{e^q+3} \doteq (-3)^n,$$

$$\frac{3e^q}{(e^q-3)^2} \doteq n3^n, \quad \frac{3e^q}{(e^q+3)^2} \doteq -n(-3)^n.$$

De aquí, después de las transformaciones elementales hallamos:

$$\frac{e^q}{(e^{2q}-9)^2} \doteq \frac{3^{n-3}(n-1)(1-(-1)^n)}{4}$$

Segundo procedimiento. Pasamos a la transformación Z (poniendo $e^q = z$): $\frac{e^q}{(e^{2q}-9)^2} = \frac{z}{(z^2-9)^2}$. Empleando la fórmula de inversión (2) y aplicando el teorema sobre los residuos, obtenemos

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{z}{(z^2-9)^2} z^{n-1}\,dz = \operatorname{res}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2}; 3\right] + \operatorname{res}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2}; -3\right];$$

pero

$$\operatorname{res}\left[\frac{z^n}{z^2-9}\,;\,3\right]=\lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^n}{(z+3)^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 3}\left(\frac{nz^{n-1}}{(z+3)^2}-\frac{2z^n}{(z+3)^3}\right)=\frac{(n-1)\cdot 3^{n-3}}{4}\,.$$

Análogamente

$$\operatorname{res}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2}\,;\,-3\right]=-(-1)^n\,\frac{(n-1)\,3^{n-3}}{4}\,.$$

Sumando estos residuos llegamos al resultado anterior. ▶

Hállense las funciones reticulares a partir de sus representaciones

6.8. $F^*(q)=\dfrac{e^q}{(e^q-1)(e^{2q}-4)}$.

6.9. $F^*(q)=\dfrac{e^q}{e^{4q}+1}$.

6.10. $F^*(q)=\dfrac{e^{2q}}{e^{2q}+2e^q+2}$.

EJEMPLO 5. Hállese la suma $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\beta$.

◀ Empleamos la propiedad 7 de la transformación discreta de Laplace:

$$f(n)\doteq\frac{e^q(e^2-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}=F^*(q),$$

por eso

$$S_n\doteq\frac{F^*(q)}{e^q-1}=\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{(e^q-1)(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)}\,.$$

Descomponiendo en factores elementales la fracción

$$(e^q-\cos\beta)/(e^q-1)/(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)$$

y añadiendo el factor e^q hallamos

$$\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{(e^q-1)(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^q}{e^q-1}-\frac{e^q(e^q-2\cos\beta-1)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}\right).$$

Pero $\dfrac{e^q}{e^q-1}\doteq\eta(n)$ (fórmula 2 de la tabla de las representaciones). Por consiguiente,

$$\frac{e^q(e^q-2\cos\beta-1)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}=\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}-$$

$$-\frac{e^q(1+\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}\doteq\cos\beta n-\frac{1+\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}\beta n.$$

Así pues,

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\eta(n) - \cos\beta n + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\beta n\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} + \operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\beta}{2\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n-1}{2}\beta}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}} \quad (n \geqslant 1). \blacktriangleright$$

Hállense las sumas siguientes:

6.11. $\sum_{k=r}^{n-1} \frac{k^{[r]}}{r!} = \sum_{k=r}^{n-1} C_k^r$.

6.12. $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \operatorname{sen} k\beta$.

6.13*. $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 (n-k)^2$.

EJEMPLO 6. Hállese la suma de la serie potencial

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right) t^n = 1 + \sqrt{2}\,t + t^2 -$$

$$- t^3 - \sqrt{2}\,t^5 - t^6 + \ldots$$

◀ La serie dada converge para $|t| < 1$, ya que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Sustituyendo t por e^{-q} llegamos a la representación discreta de la función $f(n) = \cos\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}$:

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right) e^{-nq}.$$

Pero

$$\cos\frac{n\pi}{4} \div \frac{e^q\left(e^q - \cos\frac{\pi}{4}\right)}{e^{2q} - 2e^q\cos\frac{\pi}{4} + 1}; \quad \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} \div \frac{e^q \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{e^{2q} - 2e^q\cos\frac{\pi}{4} + 1}$$

(véanse las fórmulas 9 y 10 de la tabla de representaciones). Por eso

$$f(n) = \cos\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} \div \frac{e^q\left(e^q - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + e^q\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^q - \sqrt{2}\,e^q + 1} =$$

$$= \frac{e^{2q}}{e^{2q} - \sqrt{2}\, e^{q} + 1}.$$

De aquí, volviendose al argumento t, hallamos

$$S(t) = \frac{t^{-2}}{t^{-2} - \sqrt{2}\, t^{-1} + 1} = \frac{1}{1 - t\sqrt{2} + t^2}. \blacktriangleright$$

Hállense las sumas de las siguientes series potenciales:

6.14. $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6}\, t^n$. **6.15.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{3} - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}\right) t^n$.

2. Resolución de las ecuaciones en diferencias. Sea dada la ecuación

$$a_0 x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \ldots + a_k x(n) = \varphi(n) \qquad (5)$$

(a_0, a_1, . . ., a_k son constantes) con las condiciones iniciales dadas (o arbitarias): $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$, ..., $x(k-1) = x_{k-1}$. Se supone que el segundo miembro de la ecuación (5), que es la función reticular $\varphi(n)$, es original.

Poniendo $x(n) \doteq X^*(q)$ y empleando la fórmula de adelanto (propriedad 3, b)) formamos la ecuación operacional (es lineal respecto a $X^*(q)$) y determinamos a partir de ésta $X^*(q)$. Luego, por uno de los procedimientos expuestos en el p. 1, mediante la representación hallamos la solución buscada $x(n)$.

Si la ecuación inicial fue dada no mediante los valores sucesivos de la función incógnita, sino mediante sus diferencias finitas, es decir, tiene la forma

$$b_0 \Delta^k x(n) + b_1 \Delta^{k-1} x(n) + \ldots + b_k x(n) = \varphi(n), \qquad (6)$$

entonces a consecuencia de que las fórmulas para determinar las representaciones de las diferencias finitas de las funciones reticulares (p. 1, propiedad 6) son voluminosas, es conveniente transformar previamente esta ecuación a la forma (5) con ayuda de las fórmulas conocidas que enlacen las diferencias finitas de la función con sus valores consecutivos:

$$\Delta^r x(n) = x(n+r) - C_r^1 x(n+r-1) + \\ + C_r^2 x(n+r-2) + \ldots + (-1)^r x(n). \qquad (7)$$

De modo análogo se resuelven los sistemas de ecuaciones en diferencias.

EJEMPLO 7. Resuélvase la ecuación $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

◀ Ponemos $x_n = X^*(q)$. Por la fórmula de adelanto hallamos:

$$x_{n+1} \doteq e^q\,(X^*(q) - x_0) = e^q\,(X^*(q) - 1) = e^q X^*(q) - e^q,$$
$$x_{n+2} \doteq e^{2q}\,(X^*(q) - x_0 - x_1 e^{-q}) = e^{2q}\,(X^*(q) - 1 - 2e^{-q}) =$$
$$= e^{2q} X^*(q) - e^{2q} - 2e^q.$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación inicial llegamos a la ecuación operacional

$$(e^{2q} - e^q + 1)\,X^*(q) = e^{2q} + e^q.$$

De este modo,

$$X^*(q) = \frac{e^{2q} + e^q}{e^{2q} - e^q + 1}.$$

Ya que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces anotemos $X^*(q)$ en la forma siguiente

$$X^*(q) = \frac{e^q\left(e^q - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}e^q}{e^{2q} - 2e^q \cdot \frac{1}{2} + 1} = \frac{e^q\left(e^q - \cos\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\,e^q \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{e^{2q} - 2e^q \cos\frac{\pi}{3} + 1}.$$

De aquí, por las fórmulas 10 y 11 de la tabla de representaciones del p. 1, hallamos

$$x_n = \cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} = 2\operatorname{sen}\frac{2n+1}{6}\pi. \blacktriangleright$$

OBSERVACIÓN. Es imposible anotar la respuesta en la forma $x_n = 2\cos\frac{n-1}{3}\pi$, ya que en este caso obtendremos $x_0 = 0 \neq 1$ (por la condición de que la función reticular respecto al argumento negativo es igual a cero).

EJEMPLO 8. Resuélvase la ecuación $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 3^n$ para las condiciones iniciales arbitrarias x_0, x_1.

◀ Poniendo $x_n \doteq X^*(q)$ y valiéndose de las representaciones dadas en la resolución del ejemplo 1

$$x_{n+1} \doteq e^q X^*(q) - x_0 e^q, \quad x_{n+2} \doteq e^{2q} X^*(q) - x_0 e^{2q} - x_1 e^q$$

llegamos a la ecuación operacional

$$(e^{2q} - 4e^q + 4)\,X^*(q) - x_0 e^{2q} - (x_1 - 4x_0)\,e^q = \frac{e^q}{e^q - 3}$$

$\left(\text{puesto que por la fórmula 3 de la tabla del p.1 } 3^n \doteq \frac{e^q}{e^q - 3}\right)$.

De aquí hallamos

$$X^*(q) = \frac{x_0 e^{2q}}{(e^q - 2)^2} + (x_1 - 4x_0)\,\frac{e^q}{(e^q - 2)^2} + \frac{e^q}{(e^q - 3)(e^q - 2)^2}.$$

Descomponiendo la fracción $\frac{1}{(e^q - 3)(e^q - 2)^2}$ en fracciones simples tenemos

$$X^*(q) = x_0 \frac{e^{2q}}{(e^q-2)^2} + (x_1 - 4x_0 - 1)\frac{e^q}{(e^q-2)^2} - \frac{e^q}{e^q-2} + \frac{e^q}{e^q-3}.$$

Pero

$$\frac{e^q}{e^q-3} \doteq 3^n, \quad \frac{e^q}{e^q-2} \doteq 2^n,$$

$$\frac{2e^q}{(e^q-2)^2} \doteq n\cdot 2^n, \quad \frac{2e^{2q}}{(e^q-2)^2} \doteq (n+1)\,2^{n+1}$$

(la última relación se deduce de la anterior por la fórmula de adelanto). Pasando de $X^*(q)$ al original, hallamos:

$$x_n = x_0 \frac{n+1}{2}\,2^{n+1} + \frac{x_1 - 4x_0 - 1}{2}\,n\cdot 2^n - 2^n + 3^n =$$

$$= \frac{x_1 - 2x_0 - 1}{2}\,n\cdot 2^n + (x_0 - 1)\,2^n + 3^n = (C_1 + C_2 n)\,2^n + 3^n. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 9. Resuélvase el sistema de las ecuaciones en diferencias

$$x_{n+2} - y_n = 0,$$
$$y_{n+2} + x_n = 0$$

para las condiciones iniciales $x_0 = y_0 = 1$, $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = 0$.

◀ Ponemos $x_n \doteq X^*(q)$, $y_n \doteq Y^*(q)$ y por la fórmula de adelanto tenemos:

$$x_{n+2} \doteq e^{2q}\,(X^*(q) - x_0 - x_1 e^{-q}) = e^{2q}X^*(q) - e^{2q} - \sqrt{2}e^q,$$
$$y_{n+2} \doteq e^{2q}\,(Y^*(q) - y_0 - y_1 e^{-q}) = e^{2q}Y^*(q) - e^{2q}.$$

Obtenemos el sistema de las ecuaciones operacionales

$$e^{2q}X^*(q) - Y^*(q) = e^{2q} + \sqrt{2}e^q,$$
$$e^{2q}Y^*(q) + X^*(q) = e^{2q}.$$

Como $e^{4q} + 1 = (e^{2q} + \sqrt{2}e^q + 1)(e^{2q} - \sqrt{2}e^q + 1)$, entonces la solución de este sistema se escribirá en la forma siguiente

$$X^*(q) = \frac{e^{4q} + \sqrt{2}\,e^{3q} + e^{2q}}{e^{4q} + 1} = \frac{e^{2q}}{e^{2q} - \sqrt{2}\,e^q + 1},$$

$$Y^*(q) = \frac{e^{4q} - e^{2q} - \sqrt{2}\,e^q}{e^{4q} + 1} = \frac{e^{2q} - \sqrt{2}\,e^q}{e^{2q} - \sqrt{2}\,e^q + 1}.$$

Empleando la fórmula de adelanto tenemos:

$$\frac{e^{2q}}{e^{2q} - \sqrt{2}\,e^q + 1} = \sqrt{2}\,\frac{e^q \cdot e^q \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{e^{2q} - 2e^q \cos\frac{\pi}{4} + 1} \doteq \sqrt{2}\operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{e^{2q} - \sqrt{2}\,e^q}{e^{2q} - \sqrt{2}\,e^q + 1} = \frac{e^q\left(e^q - \cos\frac{\pi}{4}\right) - e^q \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{e^{2q} - 2e^q\cos\frac{\pi}{4} + 1} \doteq$$

$$\doteq \cos\frac{n\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} = \sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}.$$

Por consiguiente,

$$x_n = \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\frac{(n+1)\pi}{4}, \quad y_n = \sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}. \blacktriangleright$$

Resuélvanse las siguientes ecuaciones lineales en diferencias:

6.16. $x_{n+2} - 3x_{n+1} - 10x_n = 0$; $x_0 = 3$, $x_1 = -1$.

6.17. $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$; $x_0 = 1$, $x_1 = -1$.

6.18. $x_{n+2} - \sqrt{3}\,x_{n+1} + x_n = 0$; $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.19. $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$; las condiciones iniciales son arbitrarias.

6.20. $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 2^n$; $x_0 = x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

6.21. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2 \cdot 4^n$; las condiciones iniciales son arbitrarias.

Resuélvanse los sistemas de las ecuaciones lineales en diferencias:

6.22.
$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n + y_n = 3^n, \\ y_{n+1} + 2x_n = -3^n; \end{cases} \qquad x_0 = 3, \quad y_0 = 0.$$

6.23.
$$\begin{cases} 5x_{n+1} - 12x_n - y_n = 0; \\ 5y_{n+1} - 6x_n - 13y_n = 0; \end{cases}$$

las condiciones iniciales son arbitrarias.

RESPUESTAS

1.1. $\frac{1}{p}$. **1.2.** $\frac{1}{p-\alpha}$. **1.3.** $\frac{6}{(p^2-1)(p^2-9)}$. **1.4.** $\frac{p^2+2}{p^3+4}$. **1.5.** $\frac{2}{(p^2+1)^2}$, $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$. **1.6.** $\frac{p(p^2+3)}{(p^2+1)^2}$, $\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$. **1.7.** $\frac{2}{(p+1)(p^2+2p+5)}$, $\frac{2p}{(p+1)(p^2+2p+5)}$. **1.8.** $\frac{p^2}{p^3+4}$, $\frac{p^3}{p^3+4}$. **1.9.** $-\frac{1}{2p}\ln\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$. **1.10.** $\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$. **1.11.** $\frac{1}{2p}\times$ $\times \ln\frac{p+1}{p-1}$. **1.12.** $\frac{1}{2p}\ln\frac{p^2+\alpha^2}{p^2+\beta^2}$. **1.13.** $\frac{1}{p}\ln\frac{p-\alpha}{p-\beta}$. **1.14.** $\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$, $\frac{\alpha e^{\alpha t}-\beta e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$, $\frac{\beta e^{\alpha t}-\alpha e^{\beta t}}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}+\frac{1}{\alpha\beta}$. **1.15.** $\frac{t}{2\beta}\operatorname{sen}\beta t$, $\frac{1}{2}\left(t\cos\beta t+\frac{1}{\beta}\operatorname{sen}\beta t\right)$, $\frac{1}{2\beta^3}(\operatorname{sen}\beta t-\beta t\cos\beta t)$. **1.16.** $\frac{\operatorname{ch}\alpha t-\cos\beta t}{\alpha^2+\beta^2}$,

$\frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha t + \beta \operatorname{sen} \beta t}{\alpha^2 + \beta^2}$, $\frac{\beta \operatorname{sh} \alpha t - \alpha \operatorname{sen} \beta t}{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}$. **1.17.** $\frac{e^{-\alpha t}(1 - \cos \beta t)}{\beta^2}$,

$\frac{e^{-\alpha t}(\beta \operatorname{sen} \beta t - \alpha(1 - \cos \beta t))}{\beta^2}$, $\frac{1}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha\beta^2} +$

$+ \frac{e^{-\alpha t}(\alpha \cos \beta t - \beta \operatorname{sen} \beta t)}{\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)}$. **1.18.** $\frac{1}{5}(\operatorname{sen} t - 2\cos t) + \frac{1}{5}e^{-t} \times$

$\times (\operatorname{sen} t + 2\cos t)$, $\frac{1}{5}(\cos t + 2\operatorname{sen} t) - \frac{1}{5}e^{-t}(3\operatorname{sen} t + \cos t)$, $\frac{1}{2} -$

$- \frac{1}{5}(\cos t + 2\operatorname{sen} t) + \frac{1}{10}e^{-t}(\operatorname{sen} t - 3\cos t)$. **1.19.** $\frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau})$.

1.20. $\frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau})e^{-pT}$. **1.21.** $\frac{h}{\tau p^2}(1 - e^{-p\tau} - e^{-2p\tau} + e^{-3p\tau})$.

1.22. $\frac{1}{p^2 + 1}\left(1 - e^{-\frac{p\pi}{2}}\right)\left(1 - pe^{-\frac{p\pi}{2}}\right)$. **1.23.** $h\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p(p-1)}\right)$.

1.24. $\frac{1}{p^2 + 1} + \frac{2p^2 e^{-p\pi}}{p^4 - 1}$. **1.25.** ◀ La función $f_0(t)$ puede anotarse en la forma $f_0(t) = (1 - \eta(t - l))f(t) = f(t) - \eta(t - l)f(t - l)$ (ya que $f(t) = f(t - l)$ para $t > l$ en virtud de la periodicidad). De aquí $F_0(p) = F(p) - e^{-pl}F(p)$, o $F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pl}}$. ▶ **1.26.** $\frac{1 - e^{-p\tau}}{p(1 - e^{-pT})}$.

1.27. $\frac{\beta \operatorname{cth} \frac{p\pi}{2\beta}}{p^2 + \beta^2}$. ● $f_0(t) = \left(1 - \eta\left(t - \frac{\pi}{\beta}\right)\right)\operatorname{sen} \beta t = \operatorname{sen} \beta t -$

$- \eta\left(t - \frac{\pi}{\beta}\right)\operatorname{sen}\left(\beta\left(t - \frac{\pi}{\beta}\right) + \pi\right) = \operatorname{sen} \beta t + \eta\left(t - \frac{\pi}{\beta}\right)\operatorname{sen} \beta \times$

$\times \left(t - \frac{\pi}{\beta}\right)$. **1.28.** $\frac{1 + e^{-p\pi}}{(p^2 + 1)(1 - e^{-pT})}$. **1.29.** $\frac{h}{p} \operatorname{th} \frac{cp}{2}$. **1.30.**

$\frac{h}{cp^2} - \frac{he^{-pc}}{p(1 - e^{-pc})}$. **1.31.** $\frac{h}{cp^2} \operatorname{th} \frac{cp}{2} - \frac{2h}{p(1 - e^{cp})}$. **1.32.**

$\frac{p + \beta e^{-\frac{p\pi}{2\beta}}}{(p^2 + \beta^2)\left(1 - e^{-\frac{p\pi}{2\beta}}\right)}$. **1.33.** $f(t) = \frac{1}{2}\eta(t - 2)(t - 2)^2 e^{-(t-2)}$, es

decir, $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 2, \\ \frac{1}{2}(t-2)^2 e^{-(t-2)} & \text{para } t \geq 2. \end{cases}$ **1.34.** $f(t) = e^{2t} + \eta \times$

$\times (t - 4) + \eta(t - 4)\operatorname{sen} 3(t - 4)$, es decir, $f(t) =$

$$= \begin{cases} e^{2t} & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ e^{2t}+1 & \text{para } 1 \leqslant t < 4, \\ e^{2t}+1 \operatorname{sen} 3(t-4) & \text{para } t \geqslant 4. \end{cases}$$

1.35. $f(t) = \cos 2t - 2\eta(t-1)\operatorname{ch} 2(t-1) + \frac{1}{4}\eta(t-3)\operatorname{sh} 4(t-3)$, es decir, $f(t) =$

$$= \begin{cases} \cos 2t & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ \cos 2t - 2\operatorname{ch} 2(t-1) & \text{para } 1 \leqslant t < 3, \\ \cos 2t - 2\operatorname{ch} 2(t-1) + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 4(t-3) & \text{para } t \geqslant 3. \end{cases}$$

1.36. $\frac{1}{(p-\alpha)^{\mu+1}}$. **1.37.** $\frac{1}{(p-\alpha)^{\mu+1}}\left(\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \ln(p-\alpha)\right)$. **1.38.** $-\frac{\gamma+\ln(p-\alpha)}{p-\alpha}$ (γ es la constante de Euler). **1.39.** $\frac{1}{2}\times$

$$\times \frac{(p+\beta i)^{\mu+1}+(p-\beta i)^{\mu+1}}{(p^2+\beta^2)^{\mu+1}}. \quad \textbf{1.40.} \quad \frac{1}{2i}\frac{(p+\beta i)^{\mu+1}-(p-\beta i)^{\mu+1}}{(p^2+\beta^2)^{\mu+1}}.$$

1.41. $-\frac{\gamma p + \frac{p}{2}\ln(p^2+\beta^2) + \beta \operatorname{arctg}\frac{\beta}{p}}{p^2+\beta^2}$. **1.42.**

$$\frac{p\operatorname{arctg}\frac{\beta}{p} + \beta\gamma - \frac{\beta}{2}\ln(p^2+\beta^2)}{p^2+\beta^2}. \quad \textbf{1.43.} \quad \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-ap}. \quad \textbf{2.1.}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{((2n)!)^2}$. **2.2.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{n!(2n+1)!}$. **2.3.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \times$

$$\times \frac{t^n}{n!(2n+1)}. \quad \textbf{2.4.} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} = I_0(t). \quad \textbf{2.5.}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)} = \int_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}\,d\tau$. **2.6.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!(2n)!}$. **2.7.** $e^t I_0 \times$

$\times (2\sqrt{t})$. ● Aplíquese el teorema de desplazamiento al original, obtenido en el ejemplo 1 del § 2. **2.8.** No se puede sólo para las funciones de los problemas 2.4 y 2.5 (para los puntos singulares de estas funciones no tiene sentido la noción de residuo). **2.9.** $e^{-2t}(\cos t - 2\operatorname{sen} t)$. **2.10.** $\frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 2t$.

2.11. $\sum_{k=1}^{n} e^{p_k t}$. **2.12.** $\frac{t}{8}(\operatorname{ch} t - \cos t) - \frac{3}{8}(\operatorname{sh} t - \operatorname{sen} t)$. **2.13.**

$\frac{1}{10}t\cos t - \frac{7}{50}\operatorname{sen} t + \frac{1}{50}\operatorname{sh} 2t$. **2.14.** $\frac{1}{8}t(\operatorname{sh} t - \operatorname{sen} t)$.

2.15. $\frac{1}{3}\operatorname{ch} t+\frac{2}{3}\operatorname{ch}\frac{t}{2}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}$. 2.16. $\frac{1}{8}t^2\cos t+\frac{3}{8}t\operatorname{sen} t$.

2.17. $\frac{1}{2}(e^{3t}-e^{t})$. 2.18. $t-2\operatorname{sh} t+t\operatorname{ch} t$. 2.19. $\frac{1}{3}(\operatorname{ch} 2t-\operatorname{ch} t)$.

2.20. $\frac{1}{10}(\operatorname{ch} t+\cos t)-\frac{1}{5}\operatorname{ch} t\cos t$.

3.1. $x(t)=C_1\cos 3t+C_2\operatorname{sen} 3t+\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3t$. 3.2. $x(t)=\left(C_1+\right.$
$\left.+C_2t+\frac{t^2}{2}\right)e^{2t}$. 3.3. $x(t)=C_1+\left(C_2-\frac{t^2+t}{4}\right)e^{-2t}$. 3.4. $x(t)=$
$=\left(C_1+\frac{t}{3}\right)e^{t}+C_2e^{-2t}$. 3.5. $x(t)=C_1+C_2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t-\operatorname{sen} t)$.

3.6. $x(t)=e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{t\sqrt{3}}{2}-\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)+e^{-t}$. 3.7. $x(t)=$
$=\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)e^{-t}$. 3.8. $x(t)=\frac{2}{9}(e^{-3t}-1)-\frac{t}{3}e^{-3t}$. 3.9. $x(t)=$
$=\frac{2}{5}(1-e^{t})\cos t+\frac{1}{5}(1+6e^{t})\operatorname{sen} t$. 3.10. $x(t)=\cos 2t-\frac{7}{8}\operatorname{sen} 2t-$
$-\frac{t}{4}\cos 2t$. 3.11. $x(t)=\frac{25}{24}\operatorname{sh} 3t-\operatorname{ch} 3t-\frac{1}{8}\operatorname{sh} t$. 3.12. $x(t)=3+$
$+t+(t-2)e^{t}$. 3.13. $x(t)=\frac{t}{4}\operatorname{ch} t-\frac{1}{4}\operatorname{sen} t$. 3.14. $x(t)=\frac{t^4}{24}e^{-t}$.

3.15. $x(t)=1-e^{-t}-\eta(t-2)(1-e^{-(t-2)})$. 3.16. $x(t)=\frac{t}{2}\operatorname{sen} t+$
$+\frac{1}{2}\eta(t-\pi)(t-\pi)\operatorname{sen}(t-\pi)$. 3.17. $x(t)=\operatorname{ch} t-1-\frac{1}{e}\eta(t-1)\times$
$\times(\operatorname{ch}(t-1)-1)$. 3.18. $x(t)=2\left(\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}-2\eta(t-1)\operatorname{sen}^2\frac{t-1}{2}+\right.$
$\left.+\eta(t-2)\operatorname{sen}^2\frac{t-2}{2}\right)$. 3.19. $x(t)=1-e^{-t}-2\eta(t-1)(1-e^{-(t-1)})+$
$+\eta(t-2)(1-e^{-(t-2)})$. ● Para construir la ecuación operacional empléese el teorema de integración del original. 3.20. ◀ A la ecuación $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=1$ para las condiciones iniciales nulas corresponde la ecuación operacional $L(p)X_1(p)=\frac{1}{p}$, donde $X_1(p)\doteq x_1(t)$ y $L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n$ es un polinomio característico de la ecuación. De aquí $L(p)=\frac{1}{pX_1(p)}$. A la ecuación $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$ para las condiciones iniciales nulas corresponde la ecuación operacional $L(p)X(p)=F(p)$, donde $X(p)\doteq x(t)$ y $F(p)\doteq f(t)$. De aquí $X(p)=$

$= \frac{F(p)}{L(p)} = pX_1(p)\,F(p)$. Con ayuda de la integral de Duhamele (véase el § 1, propiedad 11), obtenemos $x(t) = x_1(0)\,f(t) + \int_0^t x_1'(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t x_1'(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau$ (ya que $x_1(0)=0$) o $x(t) = f(0)\,x_1(t) + \int_0^t f'(\tau)\,x_1(t-\tau)\,d\tau$. ▶ **3.21.** $x(t) = \frac{1}{3}(e^t - 1) - \frac{1}{9}e^t + \frac{1}{9}e^t \ln\frac{e^t+3}{4}$. **3.22.** $x(t) = \frac{1}{2}(e^t - 1 - te^t) + \operatorname{sh} t \ln\frac{1+e^t}{2}$. **3.23.** $x(t) = e^t - 1 - (t + \ln 2)(e^t+1) + (e^t+1)\ln(e^t+1)$. **3.24.** $x(t) = \operatorname{sen} t\left(t - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right)\right) + \cos t \ln\frac{2+\cos t}{3}$. **3.25.** $x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)^2}\operatorname{sen}\tau\,d\tau$ (esta integral no se expresa mediante las funciones elementales). **3.26.** $x(t) = C_1 + C_2\operatorname{sen} t + C_3\cos t$, $y(t) = C_4 + C_3\operatorname{sen} t - C_2\cos t + \frac{t^2}{2}$. **3.27.** $x = C_1 + C_2\operatorname{sh} t + C_3\operatorname{ch} t$, $y = C_4 - C_3\operatorname{sh} t - C_2\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} t + \cos t$. **3.28.** $x(t) = e^t$, $y(t) = -e^t$. **3.29.** $x(t) = t\cos t$, $y(t) = -t\operatorname{sen} t$. **3.30.** $x(t) = \operatorname{sen} t - \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t + \cos t$. **3.31.** $x(t) = \operatorname{sen} t + \operatorname{sh} t$, $y(t) = \cos t + \operatorname{ch} t$. **3.32.** $x(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$, $y(t) = t - e^t$. **3.33.** $x(t) = -\operatorname{sen} t$, $y(t) = -\cos t$, $z(t) = \operatorname{sen} t$. **3.34.** $x(t) = (1 + t - \operatorname{sen} t - \cos t) - 2\eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \eta(t-\pi)(-1 + (t-\pi) + \cos(t-\pi) - \operatorname{sen}(t-\pi))$, $y(t) = (1 - t + \operatorname{sen} t - \cos t) - 2\eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \eta(t-\pi)\times$ $\times(1 + (t-\pi) - \operatorname{sen}(t-\pi) - \cos(t-\pi))$. **3.35.** $x(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t - 2) - \eta(t-\pi)(\operatorname{ch}(t-\pi) + \cos(t-\pi) - 2) + \frac{1}{2}\eta(t-2\pi)(\operatorname{ch}(t-2\pi) + \cos(t-2\pi) - 2)$, $y(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t) - \eta(t-\pi)(\operatorname{ch}(t-\pi) - \cos(t-\pi)) + \frac{1}{2}\eta(t-2\pi)(\operatorname{ch}(t-2\pi) - \cos(t-2\pi))$. **3.36.** Si $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = n^2 > 0$, entonces $i(t) = \frac{E_1}{Ln}e^{-kt}\operatorname{sen} nt + \frac{E_2 - E_1}{L}\eta(t-T)\times$

$\times e^{-k(t-T)} \operatorname{sen} n(t-T)$; si $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = 0$, entonces $i(t) = \frac{E_1}{L} t e^{-kt} +$ $+ \frac{E_2 - E_1}{L} \eta(t-T)(t-T) e^{-k(t-T)}$; si $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = -n^2 < 0$, entonces $i(t) = \frac{E_1}{Ln} e^{-kt} \operatorname{sh} nt + \frac{E_2 - E_1}{Ln} \eta(t-T) e^{-k(t-T)} \operatorname{sh} n(t-T)$; $k = \frac{R}{2L}$. 3.37. Si $M \neq L$, entonces $i_{1,2}(t) = \pm \frac{E_0}{2(L-M)\sqrt{n_1}} \times$ $\times e^{-k_1 t} \operatorname{sen} \sqrt{n_1}\, t + \frac{E_0}{2(L-M)\sqrt{n_2}} e^{-k_2 t} \operatorname{sen} \sqrt{n_2}\, t$, donde $\frac{R}{2(L-M)} = k_1$, $\frac{R}{2(L-M)} = k_2$, $\frac{1}{(L-M)C} - \frac{R^2}{4(L-M)^2} = n_1$, $\frac{1}{(L-M)C} - \frac{R^2}{4(L-M)^2} = n_2$ (cuando $n_1 n_2 > 0$ el signo más delante del primer sumando para i_1, es signo menos para i_2, para $n_1 n_2 < 0$ hay que sustituir $\frac{\operatorname{sen} \sqrt{n}\, t}{\sqrt{n}}$ por $\frac{\operatorname{sh} \sqrt{|n|}\, t}{\sqrt{|n|}}$, cuando $n_1 n_2 = 0$ esta relación debe ser sustituida por su límite para $n \to 0$, es decir, por t); si $M = L$ (conexión "ideal"), entonces $i_{1,2}(t) = \pm \frac{E_0}{2R} e^{-k_1 t} +$ $+ \frac{E_0}{4L\sqrt{n}} e^{-k_2 t} \operatorname{sen} \sqrt{n}\, t$, donde $\frac{1}{RC} = k_1$, $\frac{R}{4L} = k_2$, $\frac{1}{2LC} -$ $- \frac{R^2}{16L^2} = n$ (para $n > 0$ la regla de signos es la misma que en el caso de $M \neq L$; para $n < 0$ se debe sustituir $\frac{\operatorname{sen} \sqrt{n}\, t}{\sqrt{n}}$ por $\frac{\operatorname{sh} \sqrt{|n|}\, t}{\sqrt{|n|}}$, para $n = 0$ esta relación se sustituye por t). 3.38. $z(x, y) = y \cos x + x \operatorname{sen} x$. 3.39. $z(x, y) = \frac{1}{a} \int_0^x \operatorname{sh} a(x-t) f(t)\, dt$.

4.1. $x(t) = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$. 4.2. $x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t +$ $+ \frac{v_1}{\omega} \eta(t-\tau) \operatorname{sen} \omega(t-\tau) + h\eta(t-\tau_1) \cos \omega(t-\tau_1)$. 4.3. $x(t) =$ $= \frac{A}{2\omega^2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{A}{2\omega} t \cos \omega t - \frac{B \cos \omega t}{\omega} \eta(t-\tau) \operatorname{sen} \omega(t-\tau)$. 4.4. $x(t) =$ $= \frac{v_0}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \eta\left(t - \frac{k\pi}{\omega}\right) \left(t - \frac{k\pi}{\omega}\right)$. ◀ Hallemos la representación

$\delta(\operatorname{sen}\omega t)$. Ya que $\operatorname{sen}\omega t$ para $t \geqslant 0$ se reduce a cero en los puntos $t = \frac{k\pi}{\omega}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, además todas las raíces son simples, entonces según la propiedad 5 de la función impulsiva tenemos: $\delta_1(\operatorname{sen}\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)}{|\omega \cos k\pi|} = \frac{1}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \delta\left(t - \frac{k\pi}{\omega}\right)$. Por eso $v_0\delta(\operatorname{sen}\omega t) \doteqdot \frac{v_0}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{pk\pi}{\omega}}$. De aquí, la ecuación operacional para la ecuación $x'' = v_0\delta(\operatorname{sen}\omega t)$ cuando las condiciones iniciales son nulas será $p^2X(p) = \frac{v_0}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{pk\pi}{\omega}}$, o $X(p) = \frac{v_0}{\omega} \cdot \frac{1}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{pk\pi}{\omega}}$, de donde $x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \eta\left(t - \frac{k\pi}{\omega}\right)\left(t - \frac{k\pi}{\omega}\right)$. ▶

5.1. $2 \operatorname{sen} t$. **5.2.** $\operatorname{ch} 2t - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t$. **5.3.** e^t. **5.4.** $\operatorname{ch} t$. **5.5.** $\frac{1}{\sqrt{t}}$. **5.6.** $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\beta)} \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. **5.7.** $\ln \frac{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}{\alpha}$. **5.8.** $\frac{1}{\alpha^{\mu+1}} \times \left(\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \ln\alpha\right)$. ● Empléese la solución del problema 1.37.

5.9. $\frac{\pi}{2} e^{-\alpha t}$. **5.10.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$. **5.11.** $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\beta}}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$. **5.12.** $\sqrt{2\pi}(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})$. **5.13.** $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$ ● En la integral prefijada póngase previamente $x^2 = u$. **5.14.** 2. ◀ Tenemos $\frac{p}{\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^2} \doteqdot t \operatorname{sh}\frac{t}{2}$; $k = 1$. Por eso, según la fórmula (4) $S = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} t \operatorname{sh}\frac{t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t}{2}}\, dt = -\left(te^{-\frac{t}{2}} + 2e^{-\frac{t}{2}}\right)\Big|_0^{+\infty} = 2$, ▶ **5.15.** $\frac{3}{4}\pi$. ◀ $\operatorname{arctg}\frac{9}{n^2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n-1} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$. Pero $\operatorname{arctg}\frac{1}{p} \doteqdot \frac{\operatorname{sen} t}{t}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{p+1} \doteqdot e^{-t}\frac{\operatorname{sen} t}{t}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{p-1} \doteqdot e^{t}\frac{\operatorname{sen} t}{t}$

(según el teorema de desplazamiento). Por consiguiente, $\operatorname{arctg}\frac{2}{p^2} \doteqdot \doteqdot f(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t$; $k=1$. Por eso por la fórmula (4) $S=\int_0^t \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t\,dt=\int_0^t \frac{1+e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t\,dt$. Pero $\frac{1+e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t \doteqdot \doteqdot \operatorname{arctg}\frac{1}{p}+\operatorname{arctg}\frac{1}{p+1}=F(p)$; $F(0)=\operatorname{arctg}(+\infty)+\operatorname{arctg} 1=\frac{3}{4}\pi$. Por consiguiente, según la fórmula (1) $\int_0^{+\infty}\frac{1+e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t\,dt=\frac{3}{4}\pi$.

▶ 5.16. $\frac{1}{2}$. ● $\frac{2p+1}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}=\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+2p+2}$. 5.17. $\frac{\pi}{2}$. ● $\operatorname{arctg}\frac{3}{n^2+3n+1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+3}$; véase la solución del problema 5.15. 5.18. $\operatorname{arctg} x$. ● Póngase $\Phi(t, x)=\frac{x}{1+x^2t}$. 5.19. $\operatorname{arcsen} x$. ● Póngase $\Phi(t, x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2t}}$. 5.20. $\frac{\pi-x}{2}$.

◀ Empleamos la función generadora $\Phi(t, x)=\frac{t\operatorname{sen} x}{1-2t\cos x+t^2}=\sum_{n=1}^{\infty} t^n \operatorname{sen} nx$. Tenemos $\Phi(e^{-t}, x)=\frac{e^{-t}\operatorname{sen} x}{1-2e^{-t}\cos x-e^{-2t}}$; $\frac{1}{p} \doteqdot \doteqdot \eta(t)=f(t)$, $\eta(t)=1$ para $t\geqslant 0$. Por la fórmula (5) hallamos $T(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\operatorname{sen} x\,dt}{1-2e^{-t}\cos x+e^{-2t}}=\operatorname{sen} x\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{(e^{-t}-\cos x)^2+\operatorname{sen}^2 x}=$

$=-\operatorname{arctg}\frac{e^{-t}-\cos x}{\operatorname{sen} x}\Big|_0^{+\infty}=-\operatorname{arctg}(-\operatorname{ctg} x)+\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y, puesto que $-\operatorname{arctg}(-\operatorname{ctg} x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)=\frac{\pi}{2}-x$, $\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}=$

$=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}$, entonces $T(x)=\frac{\pi}{2}-x+\frac{x}{2}=\frac{\pi-x}{2}$. ▶

5.21. $-\ln\left(2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right)$. ● Empléese el desarrollo $\frac{1+t\cos x}{1+2t\cos x+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\cos nx$, poniendo $\Phi(t, x)=1-\frac{1+t\cos x}{1+2t\cos x+t^2}$.

6.1. $\frac{e^q(e^q-e^\alpha\cos\beta)}{e^{2q}-2e^{q+\alpha}\cos\beta+e^{2\alpha}}$. 6.2. $\frac{e^q(e^q-a\cos\beta)}{e^{2q}-2ae^q\cos\beta+a^2}$.

6.3. $\frac{e^{q+\alpha}(e^q+e^\alpha)}{(e^q-e^\alpha)^3}$. 6.4. $\frac{ae^q(e^q+a)}{(e^q-a)^3}$. 6.5. $\frac{1}{(e^q-1)^{k+1}}$. ● Según la propiedad 3, a). 6.6. $\frac{(n+m)^{[k]}}{k!} \div \frac{e^{(m+1)q}}{(e^q-1)^{k+1}}$ para $m<k$; $\frac{e^{(m+1)q}}{(e^q-1)^{k+1}} - \sum_{r=k}^{m-1} C_r^k e^{(m-r)q}$ para $m \geqslant k$. ● Según la propiedad 3, b). 6.7. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}\beta}{e^q-\cos\beta}$. ◀ Aplicamos la fórmula de integración de la representación (propiedad 5,b)): $\frac{\operatorname{sen}\beta n}{n} \div \int_q^\infty \frac{e^q \operatorname{sen}\beta\, dq}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1} =$

$$= \int_q^\infty \frac{e^q \operatorname{sen}\beta\, dq}{q(e^q-\cos\beta)^2+\operatorname{sen}^2\beta} = \operatorname{arctg}\frac{e^q-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\Big|_q^\infty = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}\beta}{e^q-\cos\beta}$$

$\left(\text{ya que } \operatorname{arctg}\frac{e^q-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\Big|_q^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{e^q-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}\beta}{e^q-\cos\beta}\right)$. ▶

6.8. $f(n) = -\frac{1}{3}1^n + \frac{1}{4}2^n + \frac{1}{12}(-2)^n = \frac{2^{n-2}(3+(-1)^{n-2})-1^{n-2}}{3}$.

6.9. $f(n) = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n+1}{4}\pi$. 6.10. $f(n) = (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{3n+1}{4}\pi$. ● Empléense las fórmulas para las representaciones de las funciones $a^n \operatorname{sen}\beta n$ y $a^n\cos\beta n$ (ejemplo 3 y problema 6.2). 6.11. $\frac{n^{[r+1]}}{(r+1)!} = C_n^{r+1}$.

6.12. $\frac{2}{5-4\cos\beta}(\operatorname{sen}\beta - 2^{n-1}\operatorname{sen} n\beta + 2^n \operatorname{sen}(n-1)\beta$ para $n \geqslant 1$.

6.13. $\frac{n(n^4-1)}{30}$. ● Empléese la fórmula de multiplicación de las representaciones. 6.14. $\frac{1}{2}\frac{t}{t^2-t\sqrt{3}+1}$. 6.15. $\frac{1-\frac{1+\sqrt{3}}{2}t}{1-t+t^2}$.

6.16. $x_n = \frac{1}{7}(5^{n+1}+(-2)^{n+1})$. 6.17. $x_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{2(n+1)\pi}{3}$.

6.18. $x_n = \operatorname{sen}\frac{(n+1)\pi}{6}$. 6.19. $x_n = (2x_0-x_1)1^n + (x_1-x_0)2^n =$

$= C_1 + C_2\cdot 2^n$. 6.20. $x_n = 2^n - (n+1)$. 6.21. $x_n = (x_1-2x_0-2)3^n +$

$+ (1-x_1+3x_0)2^n + 4^n = C_1\cdot 3^n + C_2\cdot 2^n + 4^n$. 6.22. $x_n = (-1)^n +$

$+ 2^n + 3^n$, $y_n = 2(-1)^n - 2^n - 3^n$. 6.23. $x_n = \frac{3x_0-y_0}{5}\cdot 2^n +$

$+ \frac{2x_0+y_0}{5}\cdot 3^n = C_1\cdot 2^n + C_2\cdot 3^n$, $y_n = \frac{2y_0-6x_0}{5}\cdot 2^n + \frac{3y_0+6x_0}{5}\cdot 3^n =$

$= -C_1\cdot 2^{n+1} + C_2\cdot 3^{n+1}$.

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, I Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 1-110, GSP, URSS.